



Politechnika Łódzka

Wydział Mechaniczny

Katedra Automatyki, Biomechaniki i Mechatroniki

Dynamika układu oscylatorów sprzężonych w polu elektromagnetycznym

dr inż. Mateusz Wojna

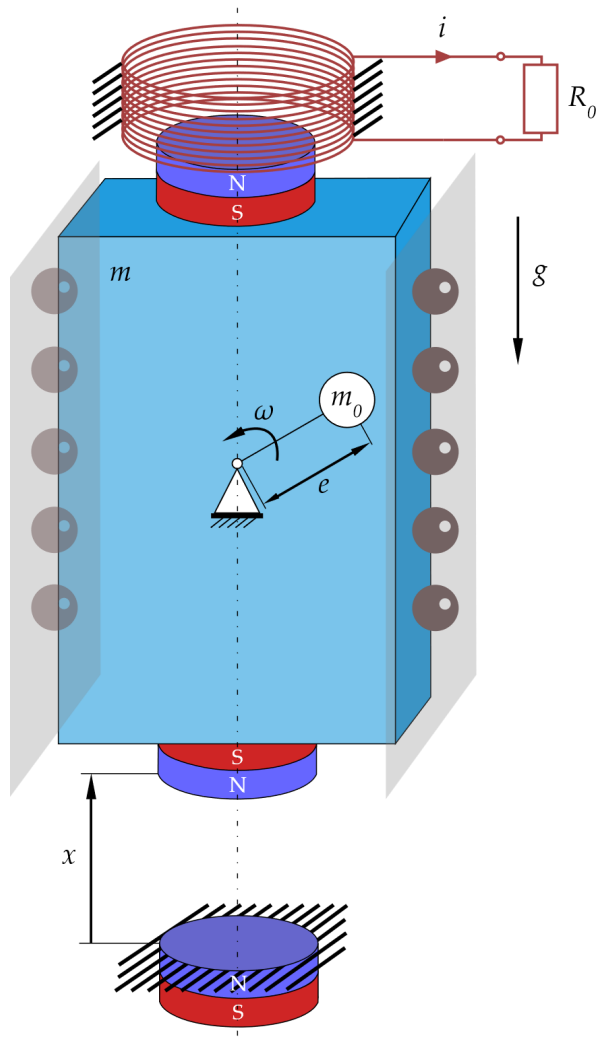


Na podstawie:

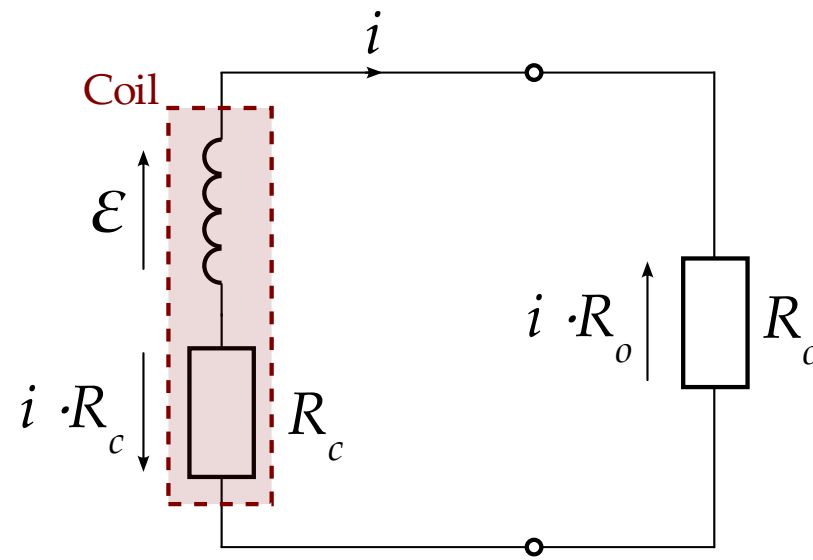
D. Grzelczyk, M. Wojna, E. Ogińska, J. Awrejcewicz, G. Wasilewski, N. Saeed, *Nonlinear oscillators coupled by magnetic fields generated by electric coils connected in series and their applications in vibrations suppression and energy harvesting*, **International Journal of Non-Linear Mechanics**. 175 (2025) 105135.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105135>

© Łódź, 09.06.2026 r.

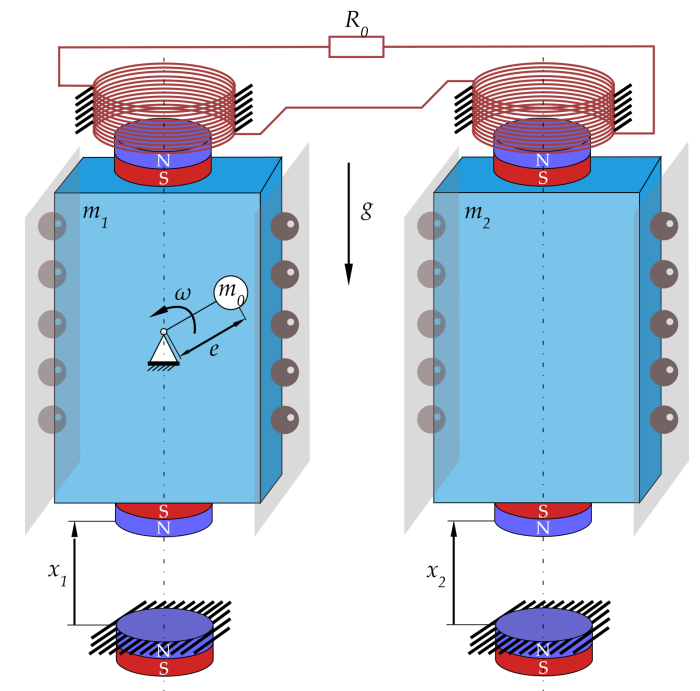
1. Opis badanego układu
2. Model matematyczny – 1 stopień swobody
3. Oddziaływanie magnes – cewka
4. Identyfikacja parametrów
5. Analiza układu o 2 stopniach swobody



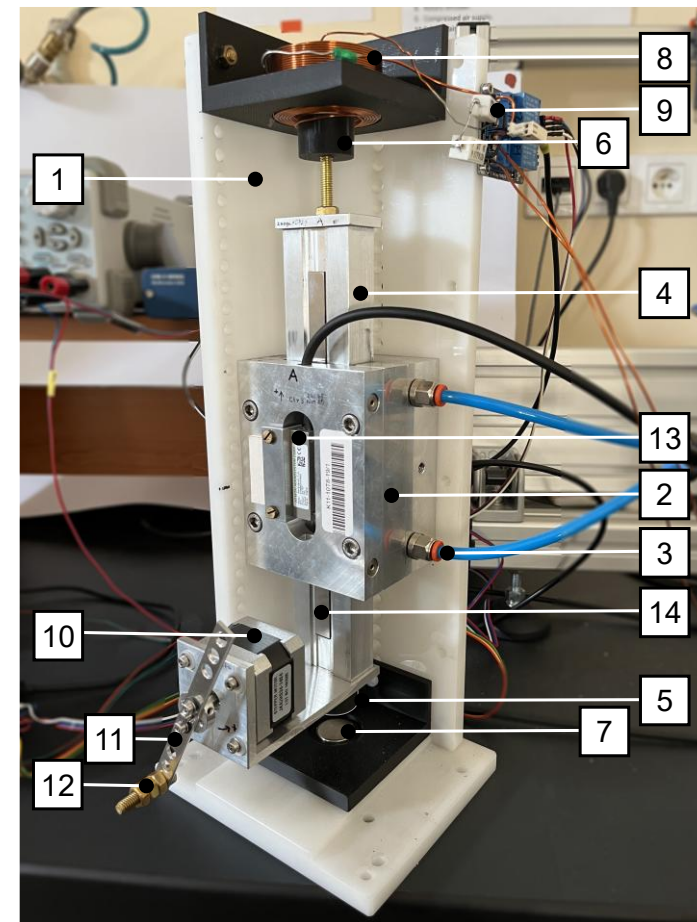
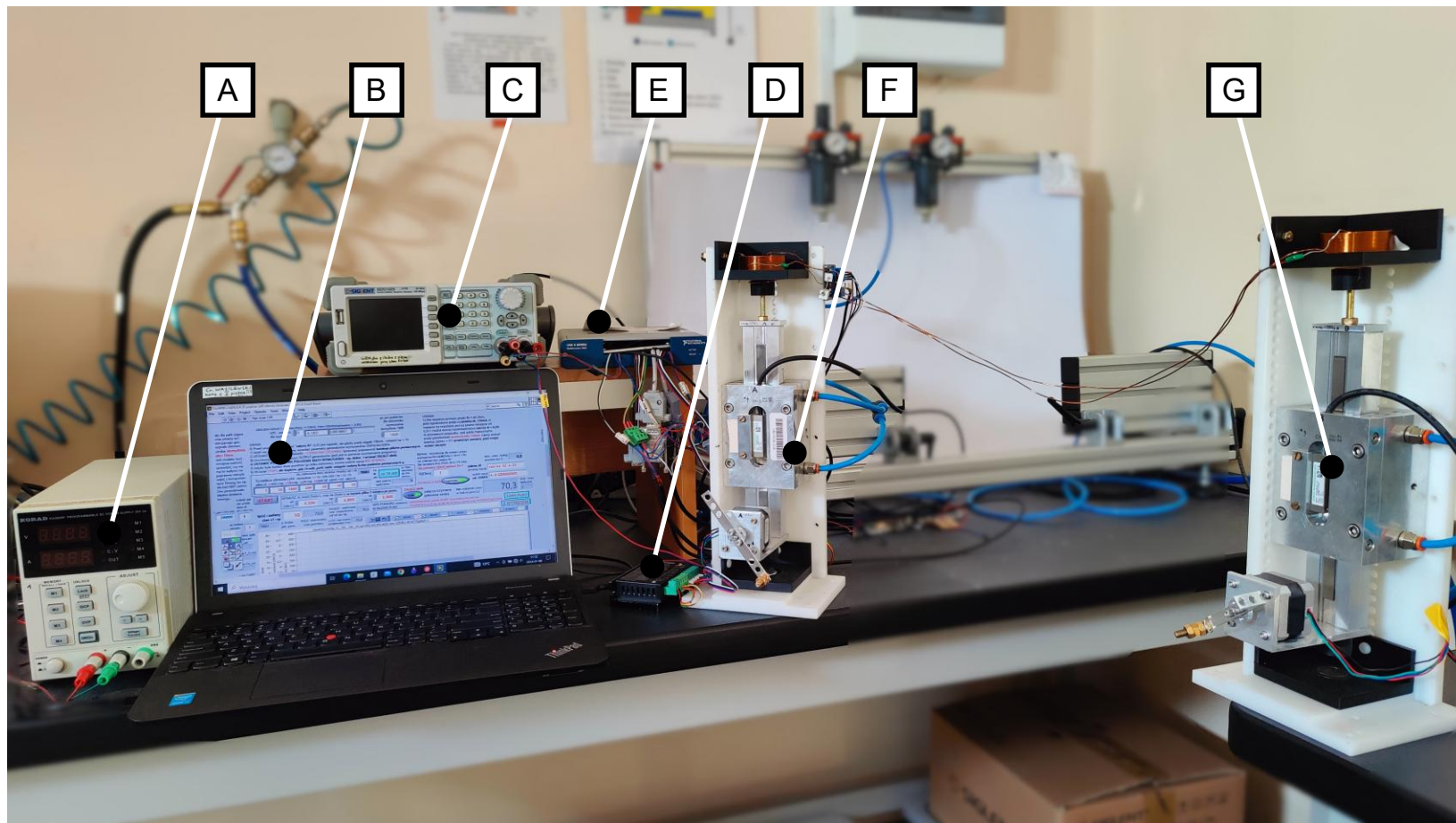
Rys. 1. Model fizyczny oscylatora



Rys. 2. Obwód elektryczny 1DoF



Rys. 3. Model sprzężonych oscylatorów



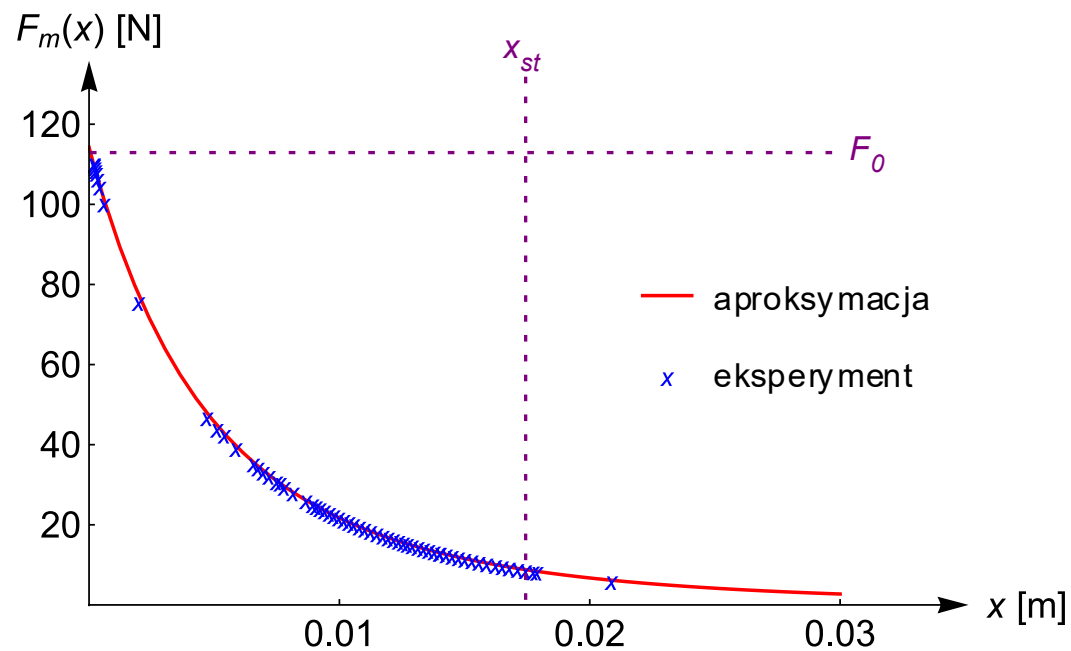
Rys. 4. Stanowisko eksperymentalne

A – zasilacz, B – PC z LabView, C – generator sygnałów, D – sterownik silnika, E – NI DAQ, F i G – struktury oscylatorów;

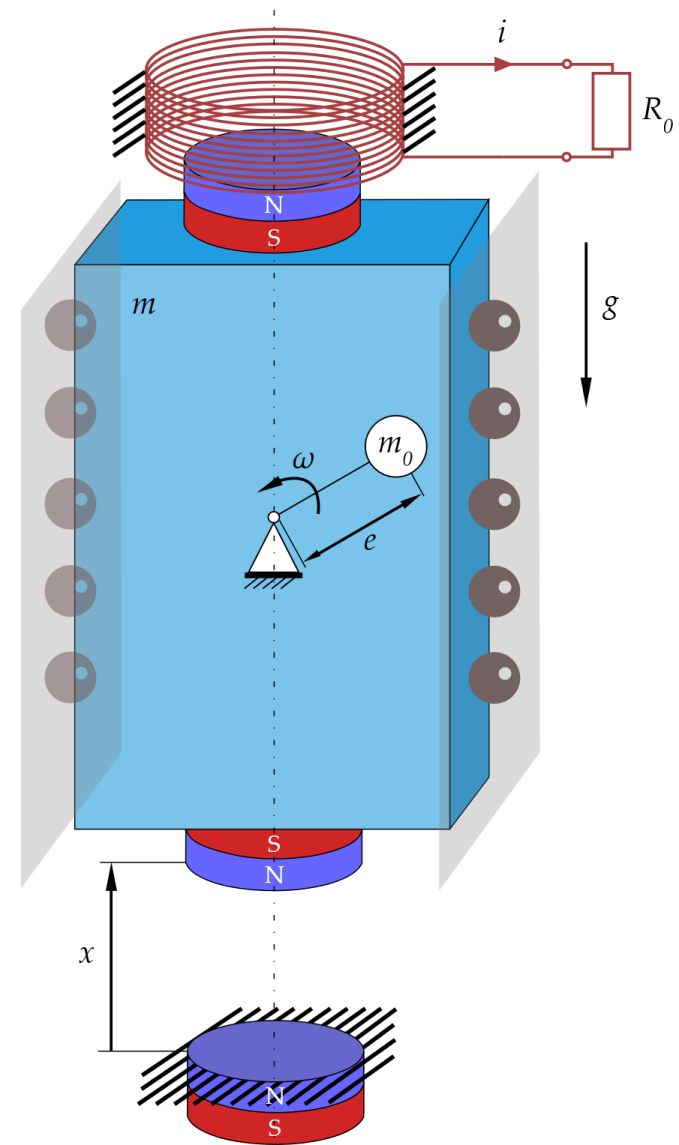
1 – rama oscylatora, 2 – przewodnica aerostaticzna, 3 – dopływ powietrza, 4 – przewodnik, 5 – dolny magnes przewodnika, 6 – górny magnes przewodnika, 7 – nieruchomy magnes, 8 – cewka elektryczna, 9 – rezystor obciążenia, 10 – silnik krokowy wymuszenia, 11 – obrotowe ramie niewyważenia, 12 – niewyważenie, 13 – enkoder liniowy, 14 – liniał magnetyczny

$$(m + m_0)\ddot{x} + c\dot{x} + (m + m_0)g + F_c(x, \dot{x}) = F_m(x) + m_0 e \omega^2 \sin \omega t \quad (1)$$

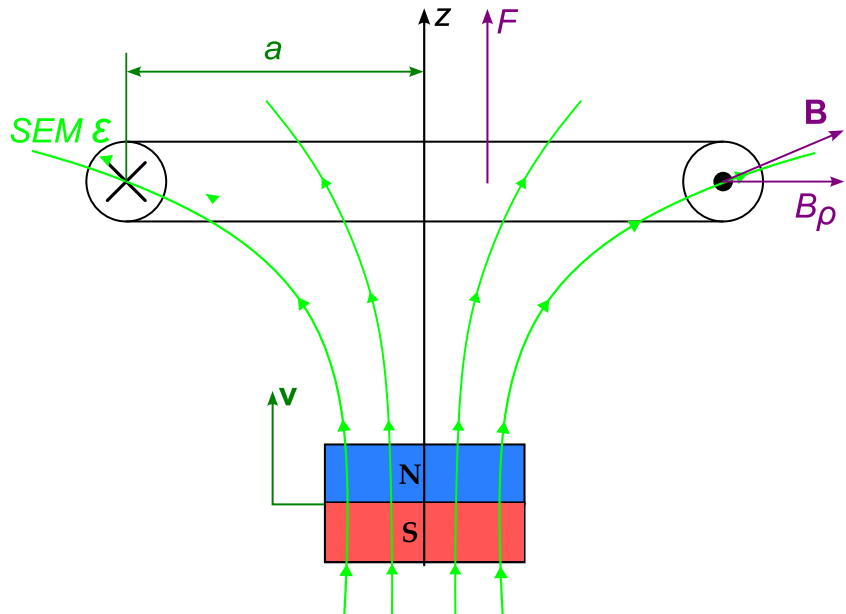
$$F_m(x) = \frac{F_0}{(1 + \alpha x)^4} \quad (2)$$



Rys. 6. Siła oddziaływania magnetycznego magnesów sprężyny magnetycznej



Rys. 5. Model fizyczny oscylatora



Rys. 7. Przewodzący pierścień elektryczny - magnes

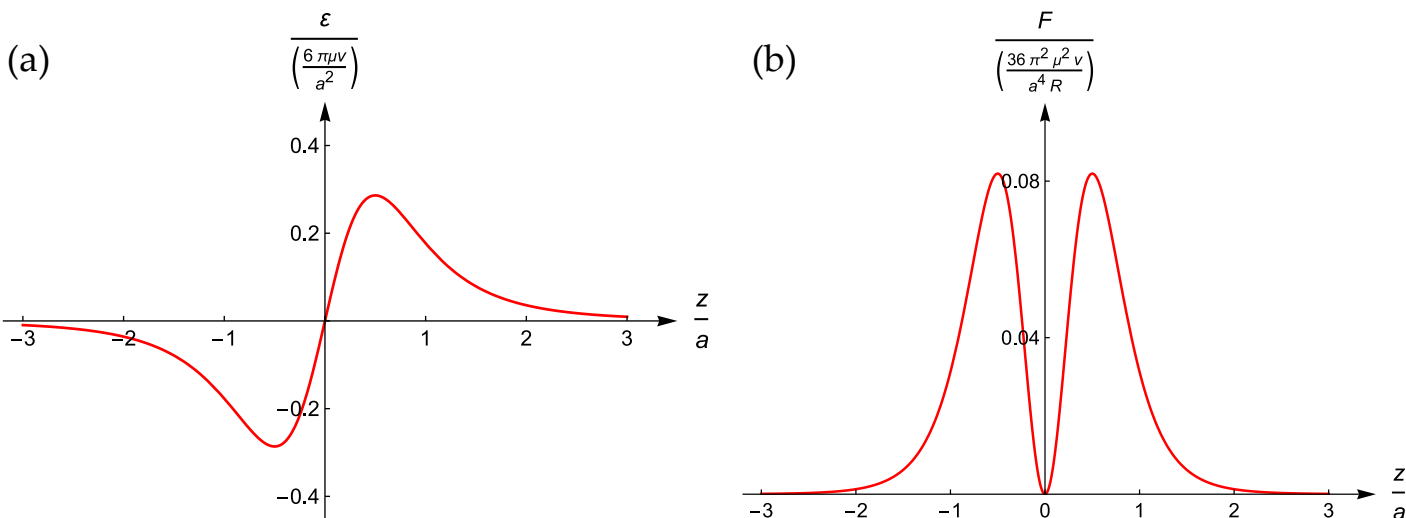
$$\varepsilon = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l v B_\rho dl = v B_\rho \int_0^l dl = v B_\rho \int_0^{2\pi} a d\varphi = 2\pi a v B_\rho \quad (3)$$

$$B_\rho = \frac{3\mu z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (4)$$

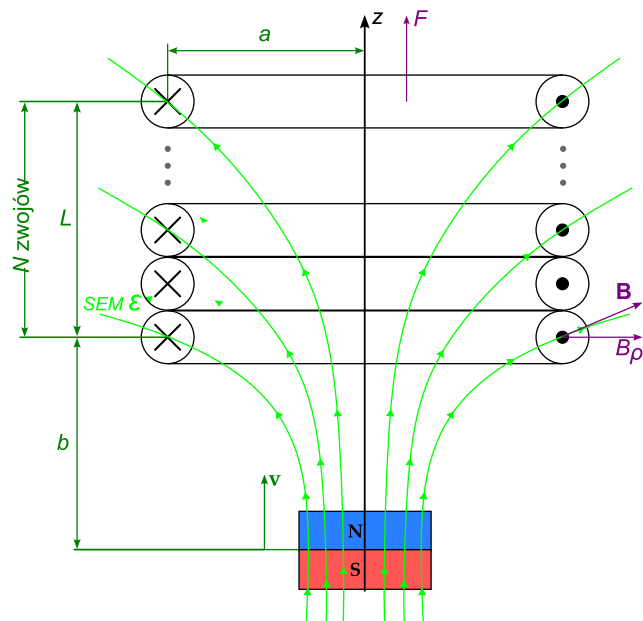
$$\varepsilon = 2\pi a v \frac{3\mu z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 6\pi\mu v \frac{a^2 z}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (5)$$

$$F = \int i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = 2\pi a B_\rho \frac{\varepsilon}{R} = \frac{(2\pi a B_\rho)^2}{R} v \quad (6)$$

$$F = \frac{36\pi^2 \mu^2 a^4 z^2}{(a^2 + z^2)^5 R} v \quad (7)$$



Rys. 8. Względne wartości indukowanej SEM (a) oraz siły oddziaływania magnetycznego (b) w funkcji bezwymiarowej odległości

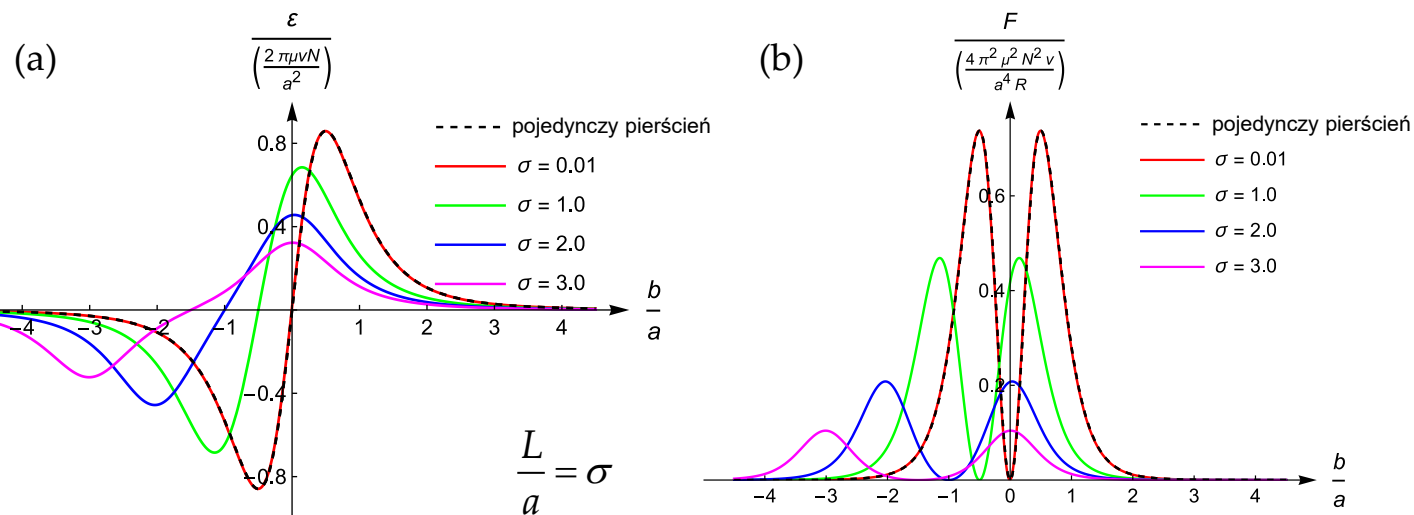


Rys. 9. Cewka jednowarstwowa - magnes

$$\varepsilon = \int_b^{b+L} 2\pi a v \frac{3\mu z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{N}{L} dz \quad (8)$$

$$\varepsilon = \left(2\pi a^2 \mu \frac{N}{L} \right) v \left(\frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + (b+L)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (9)$$

$$dF = 2\pi a B_\rho di = 2\pi a \frac{3\mu z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{Ni}{L} dz \quad (10)$$



Rys. 10. Względne wartości indukowanej SEM (a) oraz siły oddziaływania magnetycznego (b) w funkcji bezwymiarowej odległości

$$F = \left(2\pi a^2 \mu \frac{N}{L} \right)^2 \frac{v}{R} \left(\frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + (b+L)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \quad (11)$$

$$F = A^2 \left(\frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + (b+L)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \frac{v}{R} \quad (12)$$

$$m = 0.89694 \text{ kg}$$

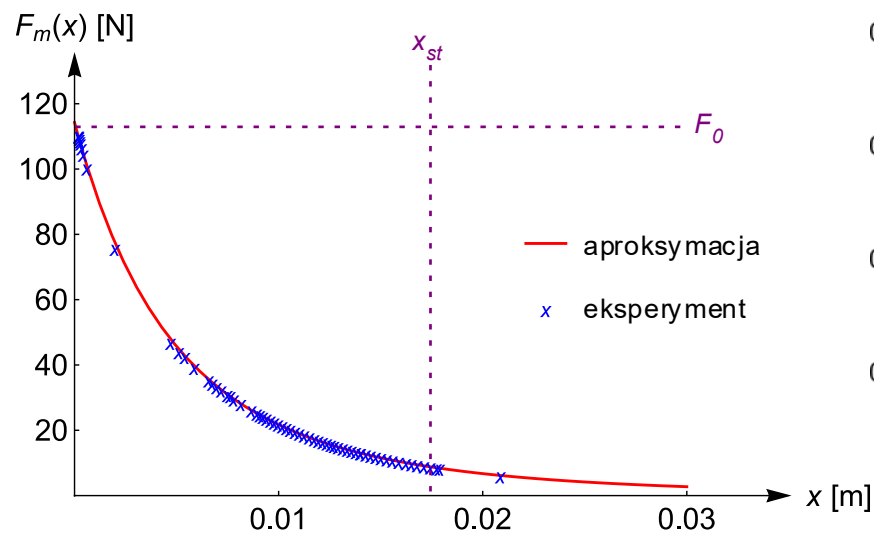
$$m_0 = 0.01292 \text{ kg}$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

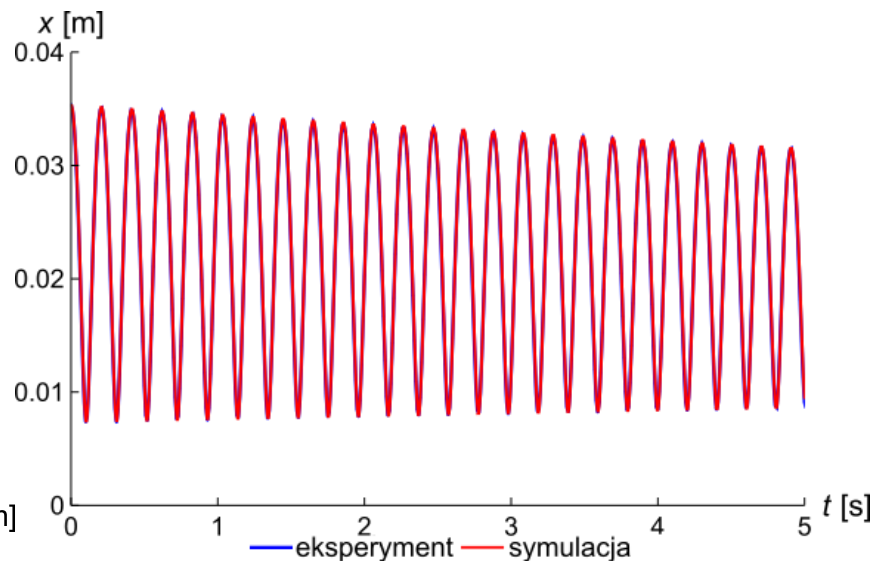
$$F_m(x) = \frac{F_0}{(1 + \alpha x)^4}$$

$$mg = \frac{F_0}{(1 + \alpha x_{st})^4}$$

$$F_0 = mg(1 + \alpha x_{st})^4$$



Rys. 11. Siła oddziaływania magnetycznego magnesów sprężyny magnetycznej

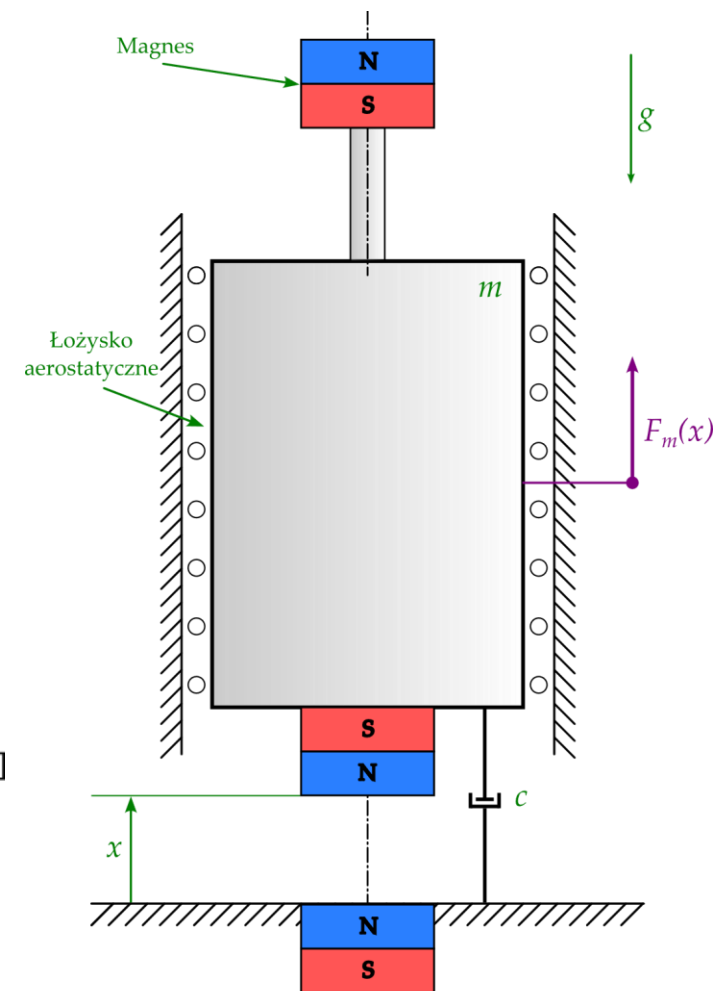


Rys. 12. Przebieg czasowy drgań swobodnych

$$F_0 = 129.764 \text{ N}$$

$$\alpha = 55.0231 \frac{1}{\text{m}}$$

$$c = 0.0716945 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

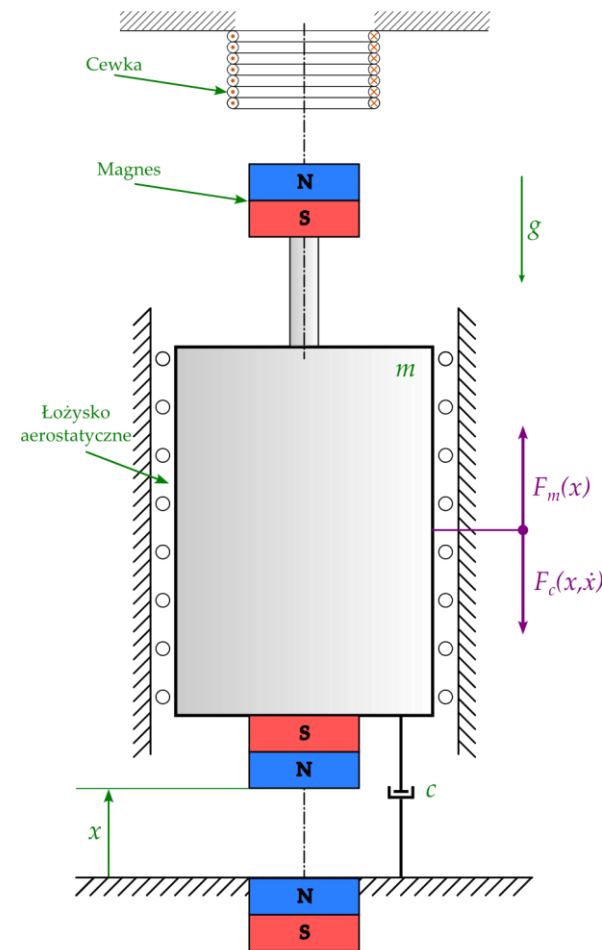


Rys. 13. Model fizyczny oscylatora drgań swobodnych tłumionych

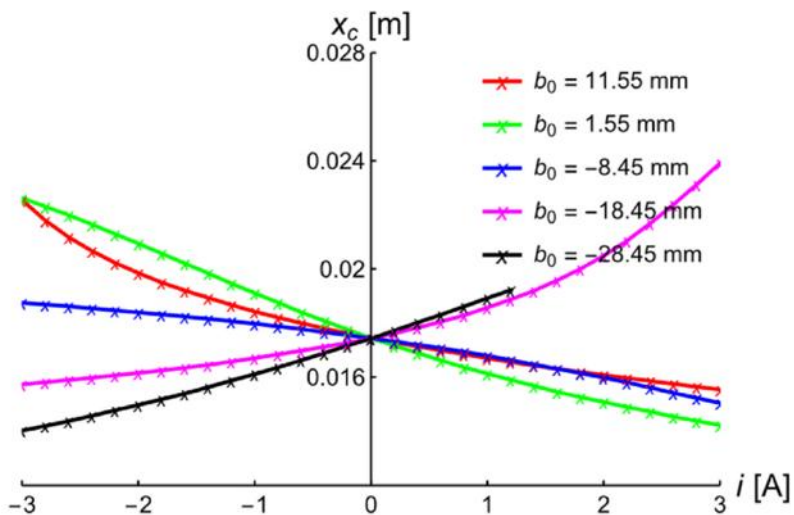
$$mg + A \left[\frac{1}{(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_c)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_c + L)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] i = F_m(x_c) \quad (13)$$

$$A = 2\pi a^2 \mu \frac{N}{L}$$

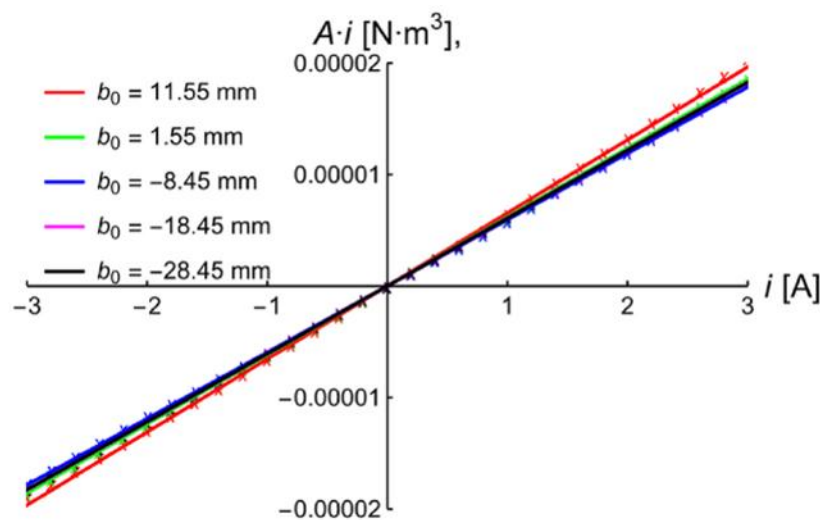
$$Ai = \frac{F_m(x_c) - mg}{\left[\frac{1}{(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_c)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_c + L)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]} \quad (14)$$



Rys. 16. Model fizyczny oscylatora

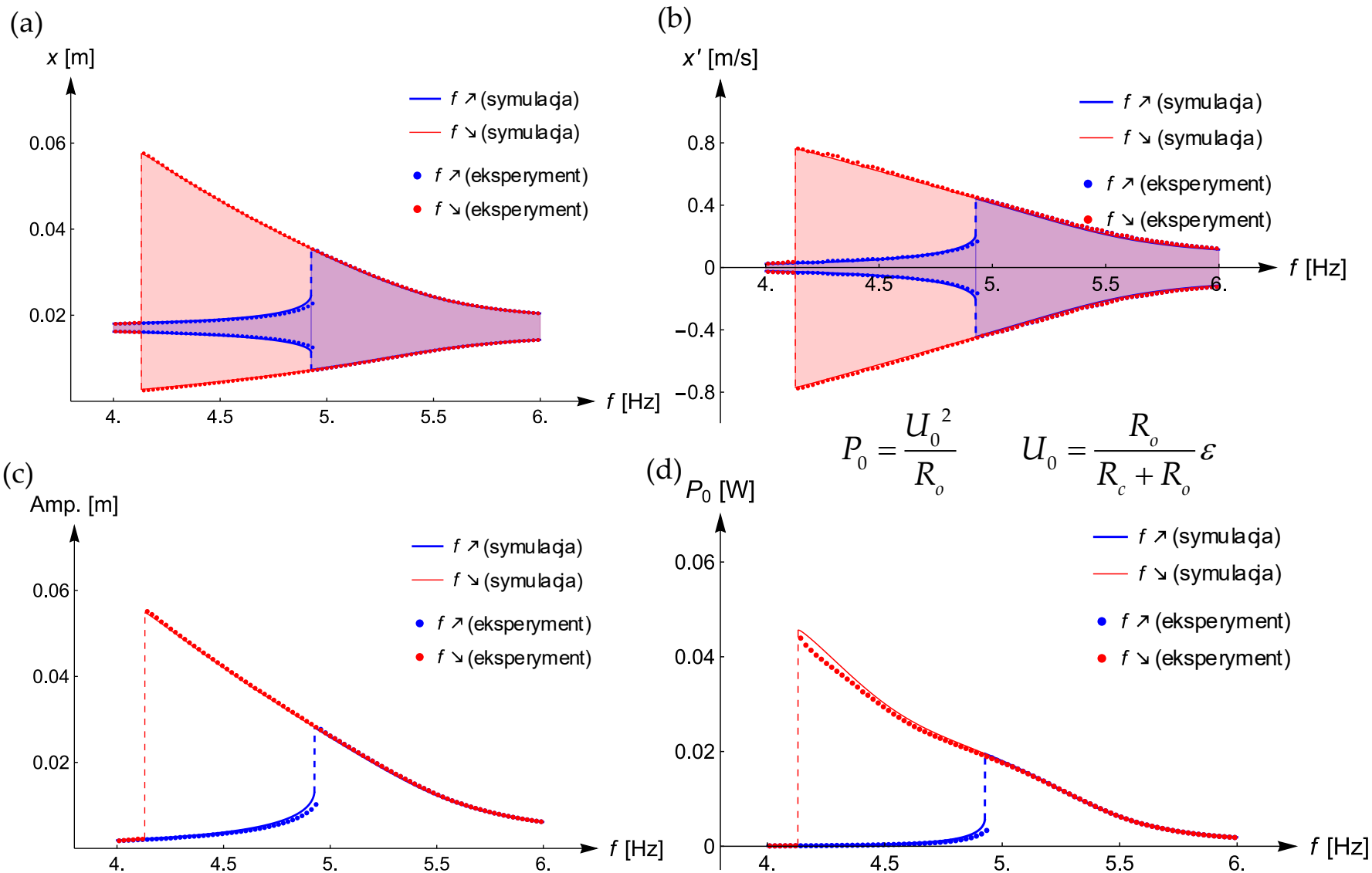


Rys. 14. Zależność położenia oscylatora od prądu zasilania cewki

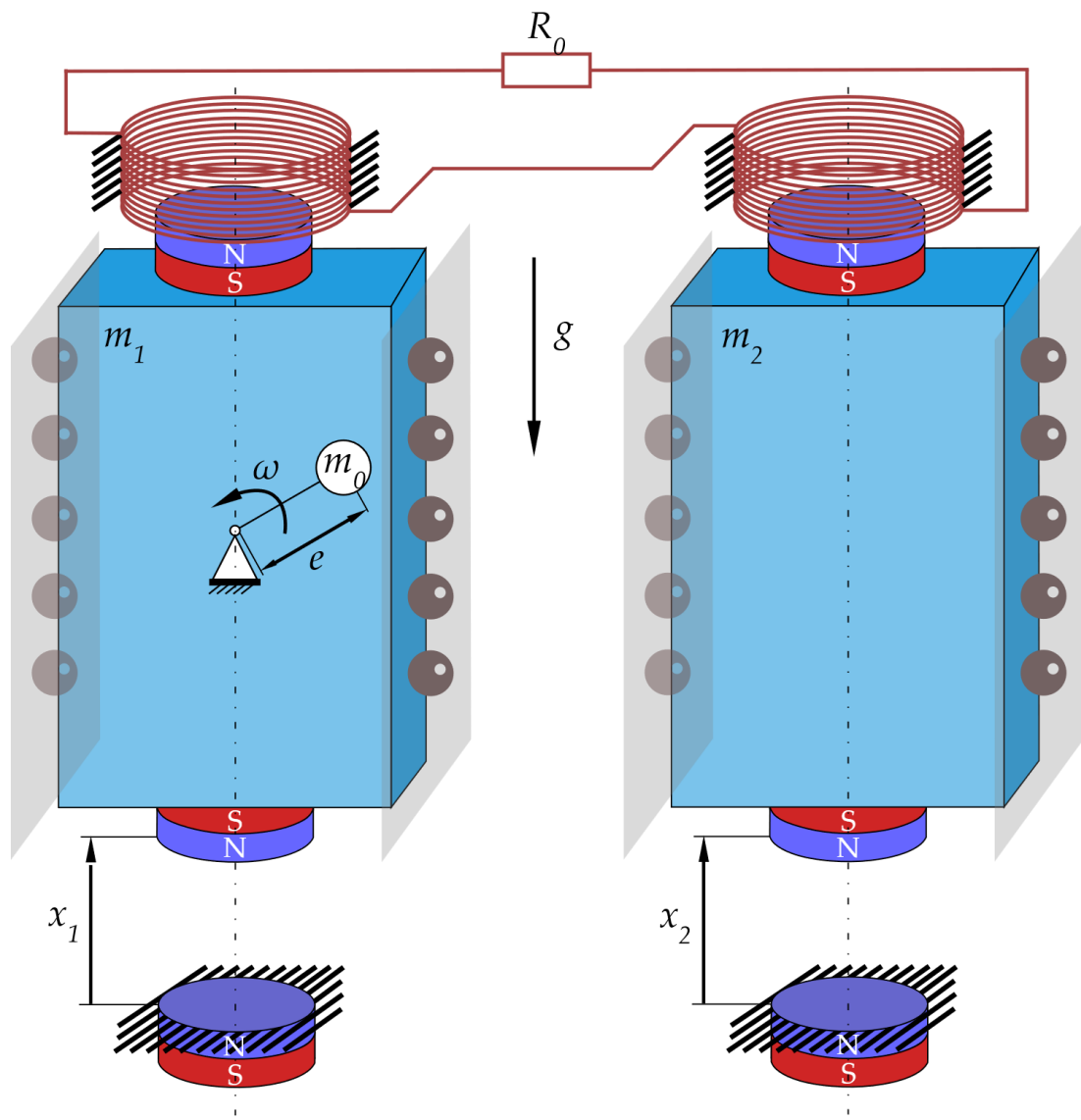


Rys. 15. Przedstawienie zależności (16) dla różnych wartości parametru b_0

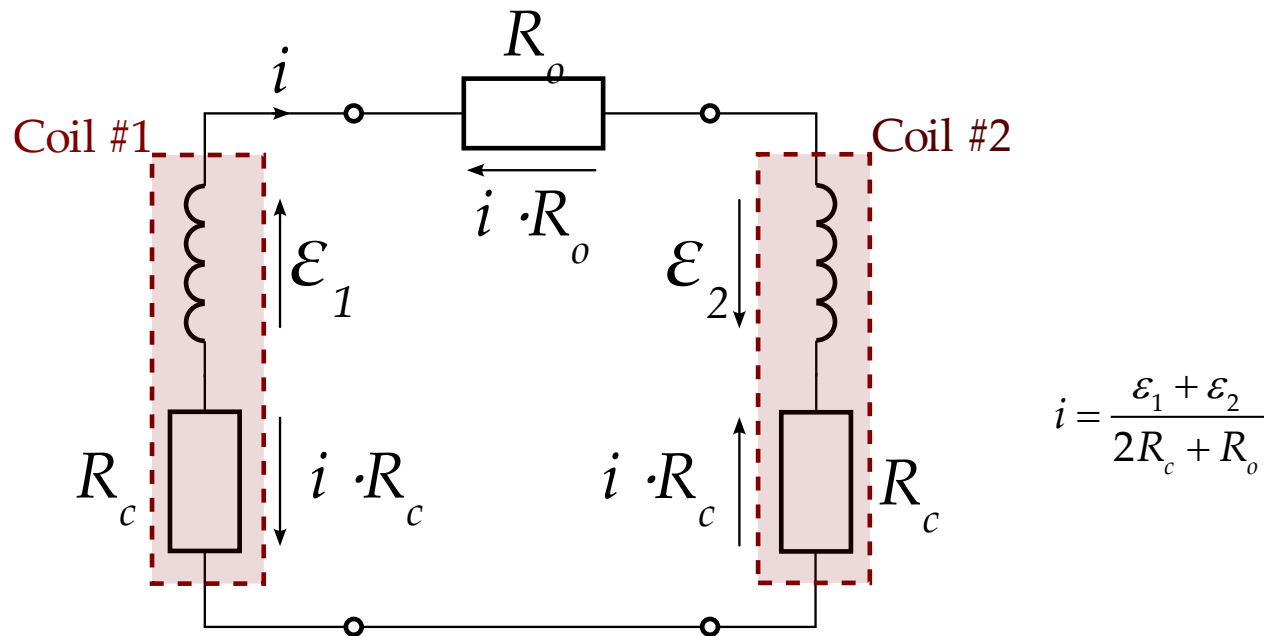
$$A \approx 6.17683 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{A}^{-1}$$



Rys. 17. Zakres zmian położenia (a), prędkości (b) w funkcji częstotliwości oraz charakterystyki częstotliwościowe amplitudy (c) oraz generowanej mocy elektrycznej (d).



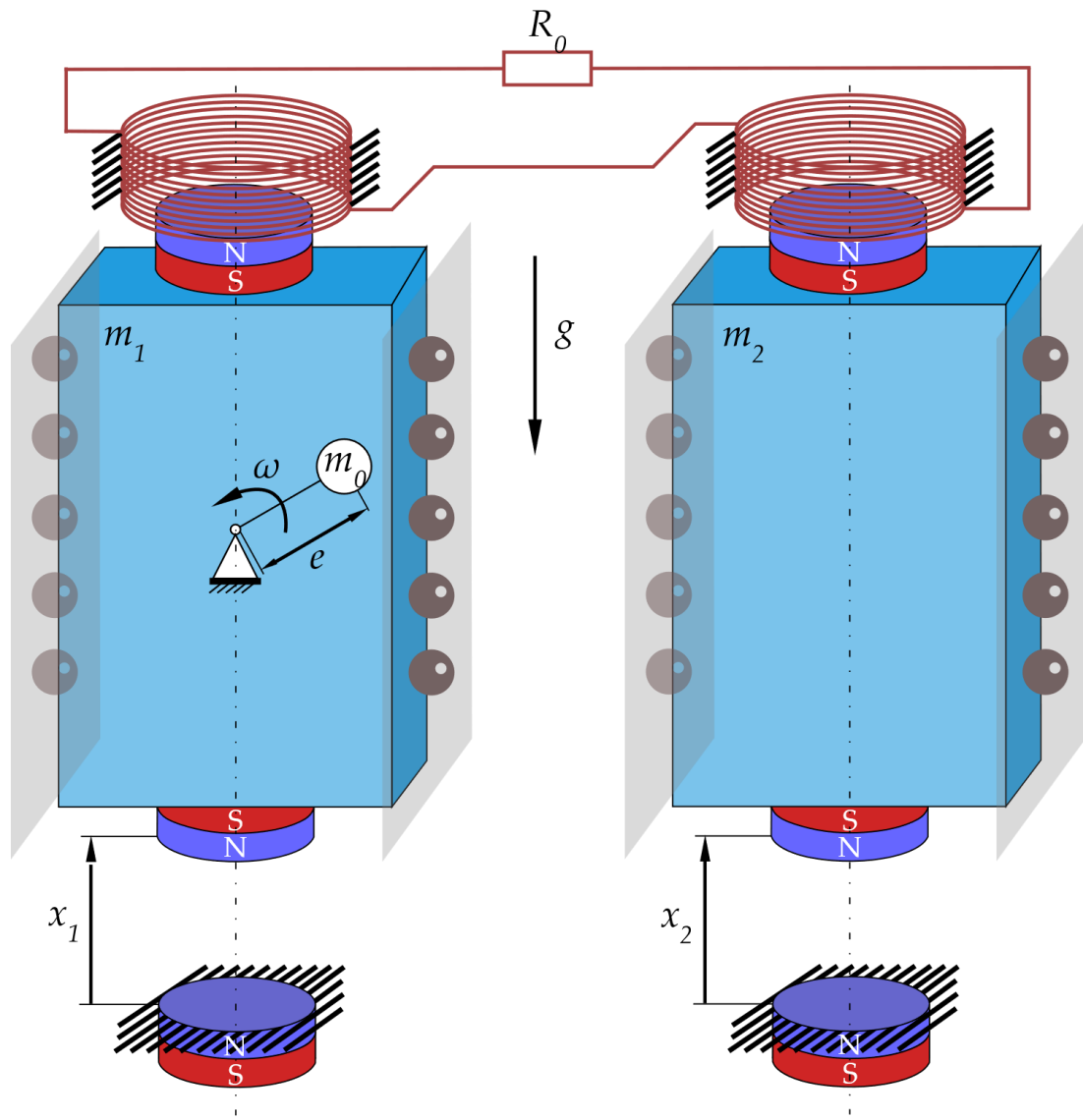
Rys. 18. Model fizyczny oscylatorów sprzężonych



Rys. 19. Schemat elektryczny układu

$$i = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2R_c + R_0}$$

$$\begin{cases} (m + m_0)\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (m + m_0)g + F_{c1}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{F_0}{(1 + \alpha x_1)^4} + m_0 e \omega^2 \sin \omega t \\ (m + m_0)\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + (m + m_0)g + F_{c2}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{F_0}{(1 + \alpha x_2)^4} \end{cases} \quad (15)$$



Rys. 18. Model fizyczny oscylatorów sprzężonych

$$F_{c1}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = A \left[\frac{1}{\left(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_1)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_1 + L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] i \quad (16)$$

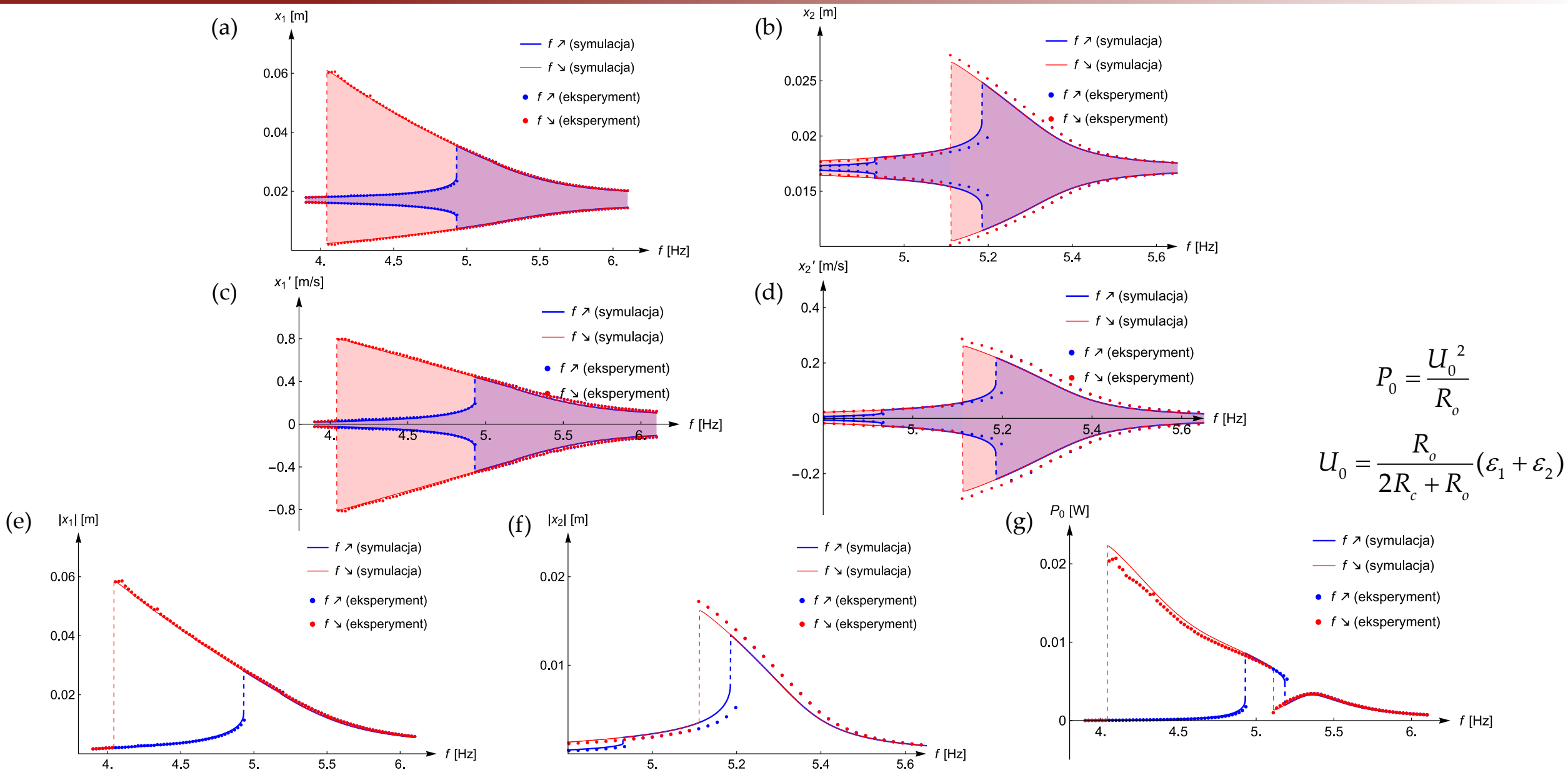
$$F_{c2}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = A \left[\frac{1}{\left(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_1)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_1 + L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] i \quad (17)$$

$$A = 2\pi a^2 \mu \frac{N}{L}$$

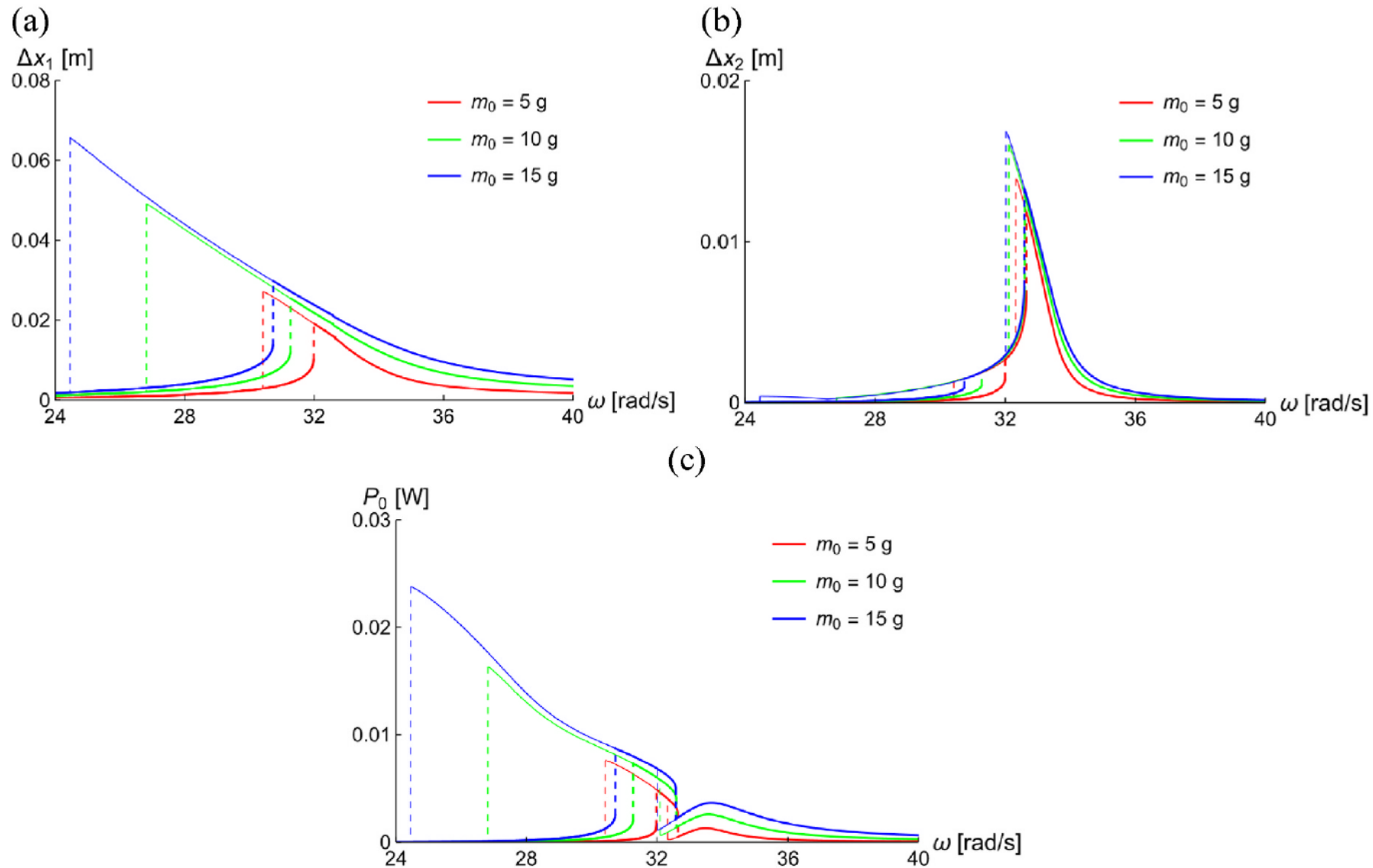
$$i = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2R_c + R_0}$$

$$\varepsilon_1 = A \left[\frac{1}{\left(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_1)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_1 + L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \dot{x}_1 \quad (18)$$

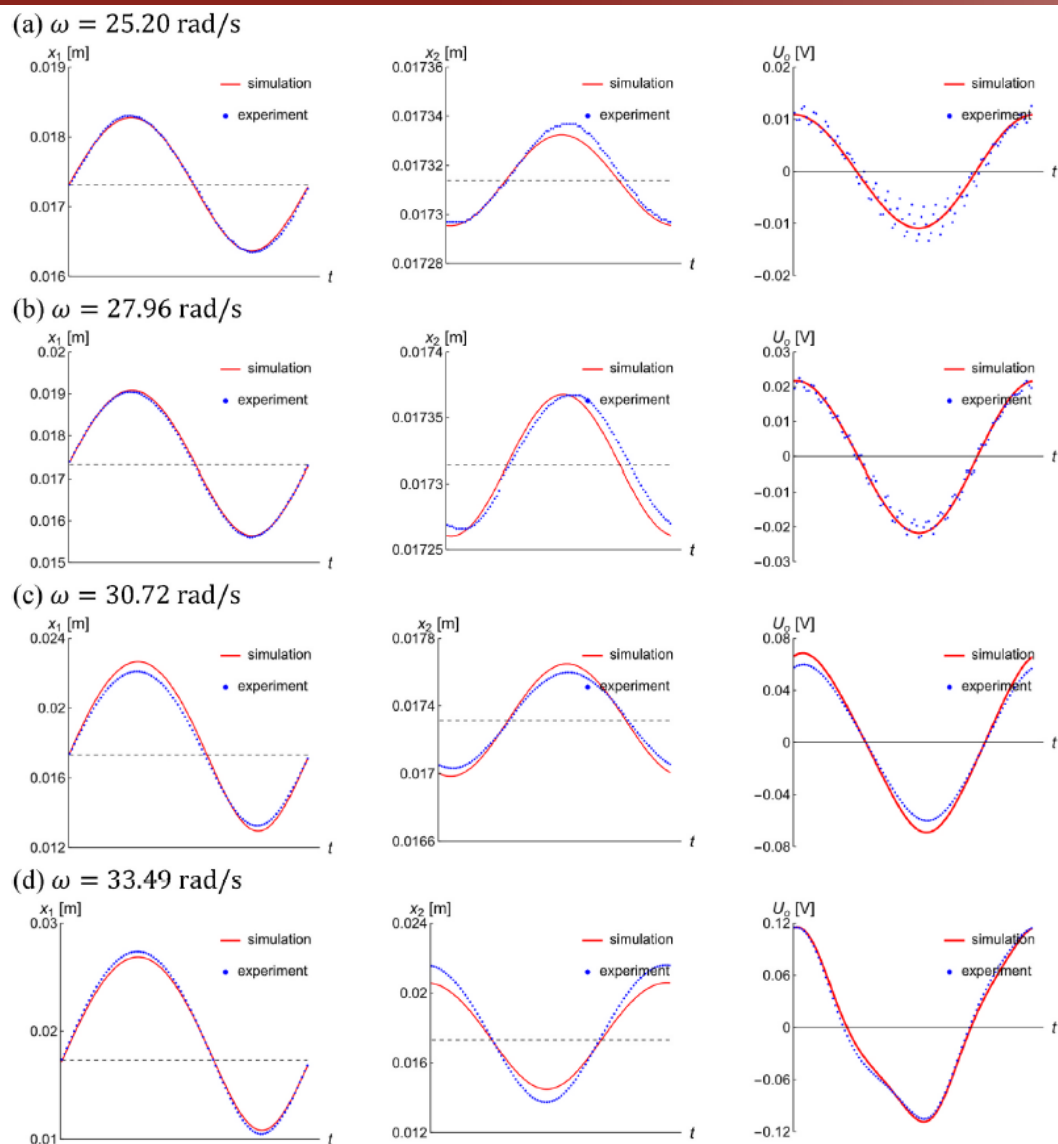
$$\varepsilon_2 = A \left[\frac{1}{\left(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_2)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(a^2 + (b_0 + x_{st} - x_2 + L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \dot{x}_2 \quad (19)$$



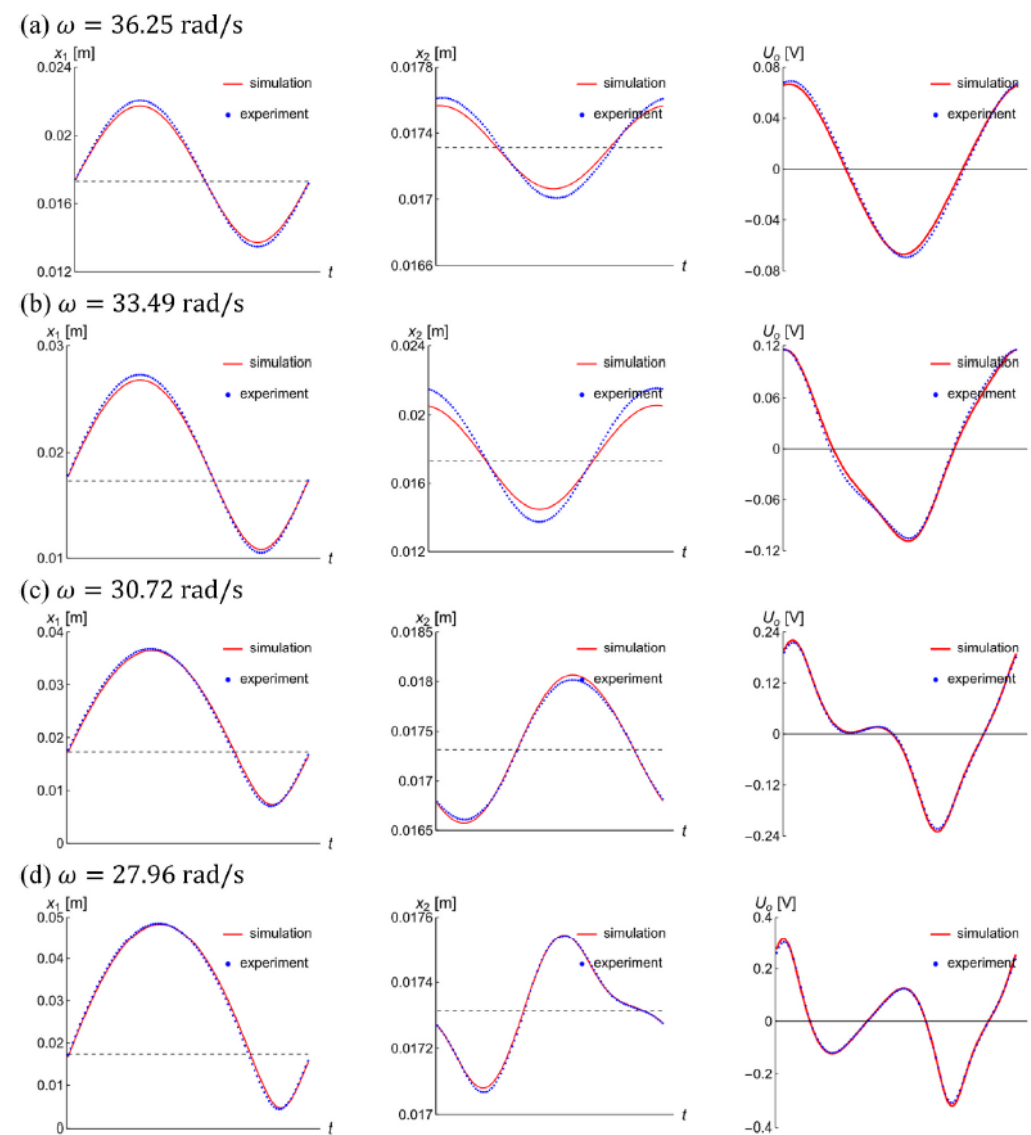
Rys. 20. Zakres zmian położenia oscylatorów (a-b), prędkości (c-d) w funkcji częstotliwości oraz charakterystyki częstotliwościowe amplitud (e-f) oraz generowanej mocy elektrycznej (g).



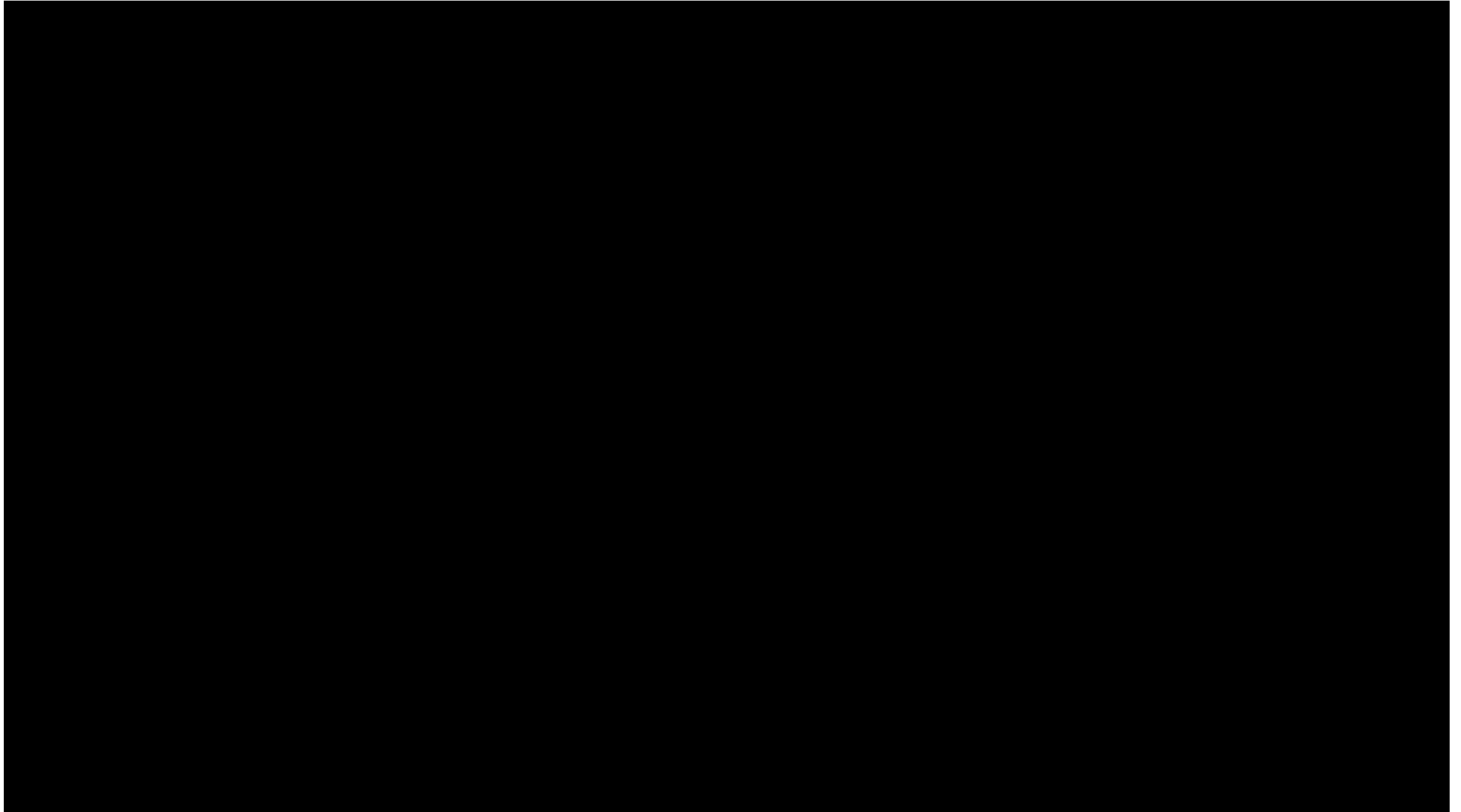
Rys. 21. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe drgań pierwszego oscylatora (a), drugiego oscylatora (b) i generowanej mocy elektrycznej (c) w stanie ustalonym, uzyskane zarówno dla rosnących, jak i malejących częstotliwości oraz różnych wartości parametru m_0 .



Rys. 22. Przebiegi czasowe położenia oscylatorów oraz generowanego napięcia dla jednego okresu drgań ustalonych dla wybranych wartości częstości wymuszenia, przy **zwiększaniu** częstości



Rys. 23. Przebiegi czasowe położenia oscylatorów oraz generowanego napięcia dla jednego okresu drgań ustalonych dla wybranych wartości częstości wymuszenia, przy **zmniejszaniu** częstości



1. D. Grzelczyk, M. Wojna, E. Ogińska, G. Wasilewski, J. Awrejcewicz, *Numerical and experimental investigation of a magneto-electro-mechanical oscillator with a new magnet – coil interaction model and energy harvesting*, **Journal of Sound and Vibration**. 583 (2024) 118427. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118427> [IF = 4.7, 200 punktów]
2. D. Grzelczyk, M. Wojna, E. Ogińska, J. Awrejcewicz, G. Wasilewski, N. Saeed, *Nonlinear oscillators coupled by magnetic fields generated by electric coils connected in series and their applications in vibrations suppression and energy harvesting*, **International Journal of Non-Linear Mechanics**. 175 (2025) 105135. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105135> [IF = 3.2, 100 punktów]

Dziękuję za uwagę.