

# Wpływ tarcia anizotropowego na dynamikę poziomego wahadła

dr inż. Adam Wijata

Katedra Automatyki, Biomechaniki i Mechatroniki K-11

Wydział Mechaniczny PŁ

# Plan prezentacji

- ⚙ Motywacja podjęcia badań
- ⚙ Modelowanie fizyczne i matematyczne układu wahadła poziomego
  - ⚙ Model tarcia anizotropowego
  - ⚙ Model układu mechanicznego
- ⚙ Analiza dynamiki układu z tarciem izotropowym
- ⚙ Analiza dynamiki układu z tarciem anizotropowym

# Motywacja

Tapia et al. EPJ Techniques and Instrumentation (2016) 3:1  
DOI 10.1140/epjti/s40485-016-0029-y



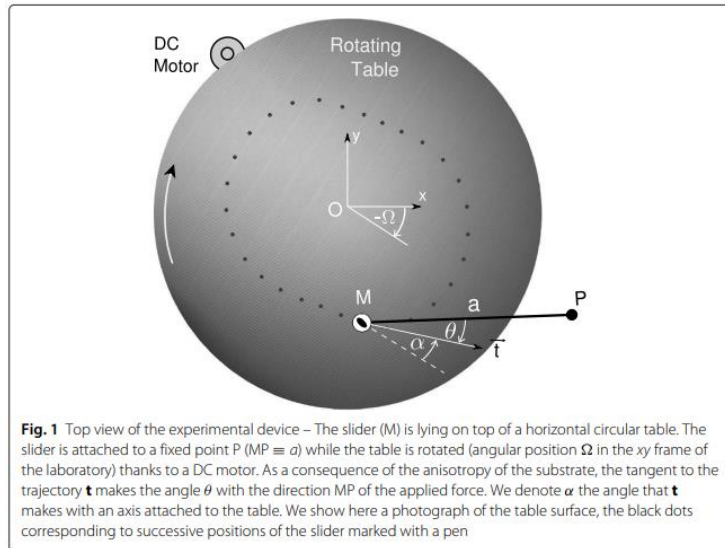
EPJ Techniques and Instrumentation  
a SpringerOpen Journal

RESEARCH ARTICLE

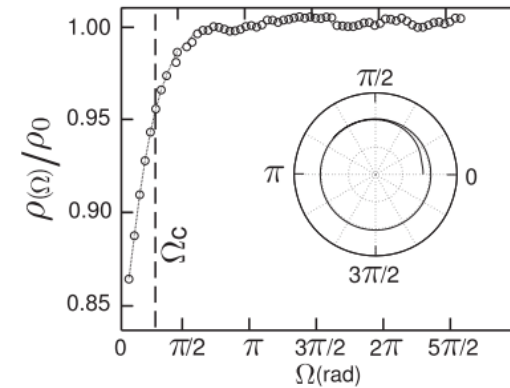
Open Access

## Anisotropic friction: assessment of force components and resulting trajectories

F. Tapia, D. Le Tourneau and J.-C. Géminard\*

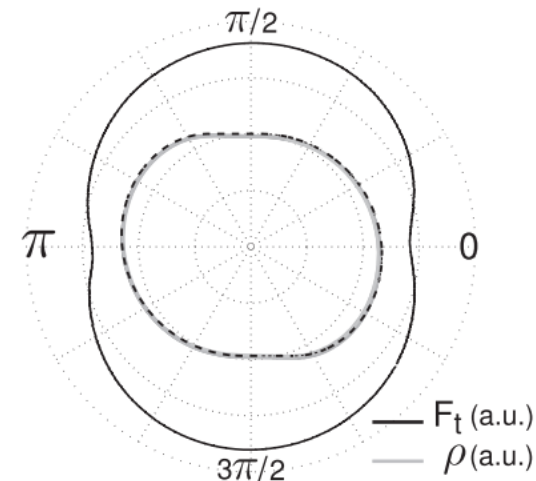


**Fig. 1** Top view of the experimental device – The slider (M) is lying on top of a horizontal circular table. The slider is attached to a fixed point P ( $MP \equiv a$ ) while the table is rotated (angular position  $\Omega$  in the  $xy$  frame of the laboratory) thanks to a DC motor. As a consequence of the anisotropy of the substrate, the tangent to the trajectory  $\mathbf{t}$  makes the angle  $\theta$  with the direction  $MP$  of the applied force. We denote  $\alpha$  the angle that  $\mathbf{t}$  makes with an axis attached to the table. We show here a photograph of the table surface, the black dots corresponding to successive positions of the slider marked with a pen



**Fig. 2** Radius  $\rho$  vs. angular position  $\Omega$  – We observe that the asymptotic trajectory is reached after a typical rotation of about  $\Omega_c = a/\rho_0 \simeq 0.7$  rad in our experimental conditions. Inset: trajectory of the slider in the table frame (continuous line) [isotropic friction,  $a = 12.3$  cm and  $R = 22.1$  cm]

Izotropia – położenie równowagi

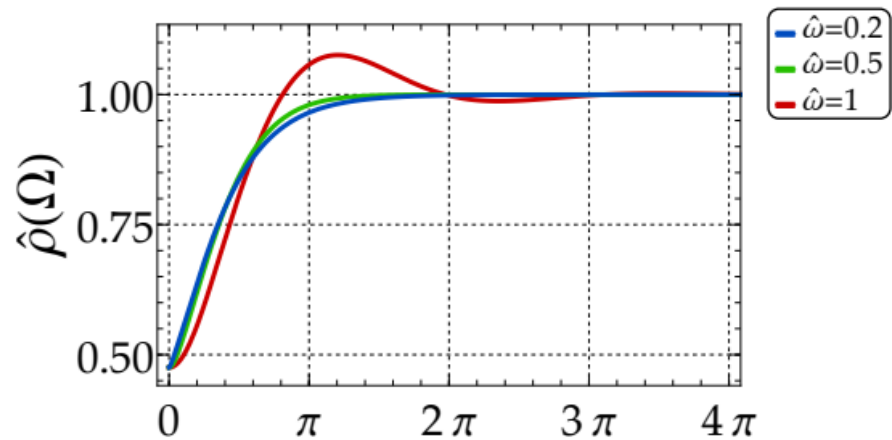


**Fig. 5** Polar plot of the frictional force,  $F_t$ -plot, and resulting trajectory – We report here, in the frame of reference attached to the rotating table,  $F_t$  and  $\rho$  (in arbitrary units). The dashed line corresponds to the numerical trajectory obtained using the experimental force. We observe that the trajectory is mainly elongated in the direction exhibiting the smaller value of the friction, but that  $F_t$  and  $\rho$  do not exhibit the same symmetries due to the asymmetry introduced by the driving [The concentric dotted circles are used as guides to the eye,  $a = 12.6$  cm and  $R = 19.3$  cm]

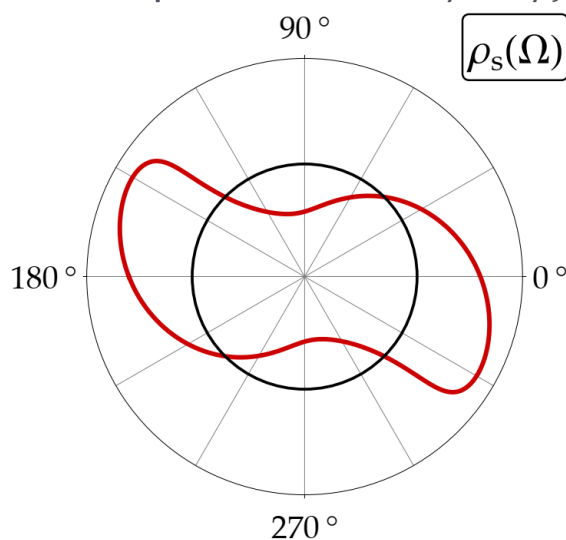
Anizotropia – ruch oscylacyjny

# Motywacja

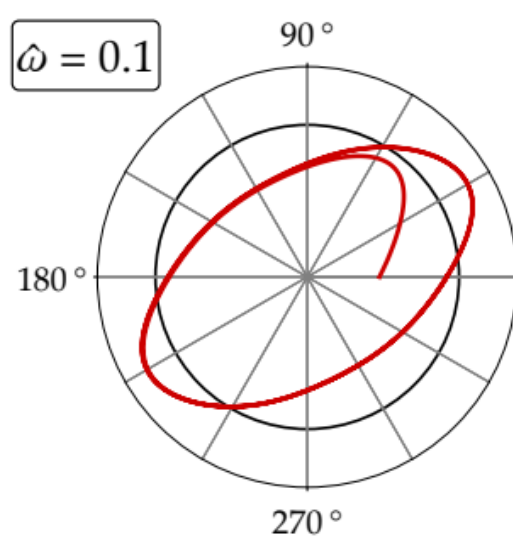
Izotropia – położenie równowagi



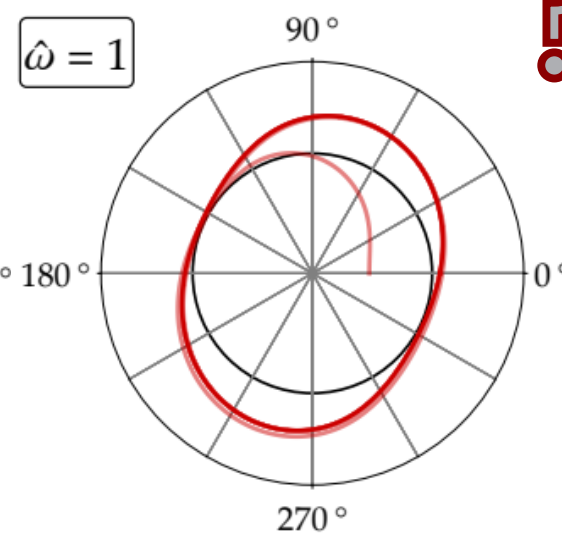
Anizotropia – ruch oscylacyjny



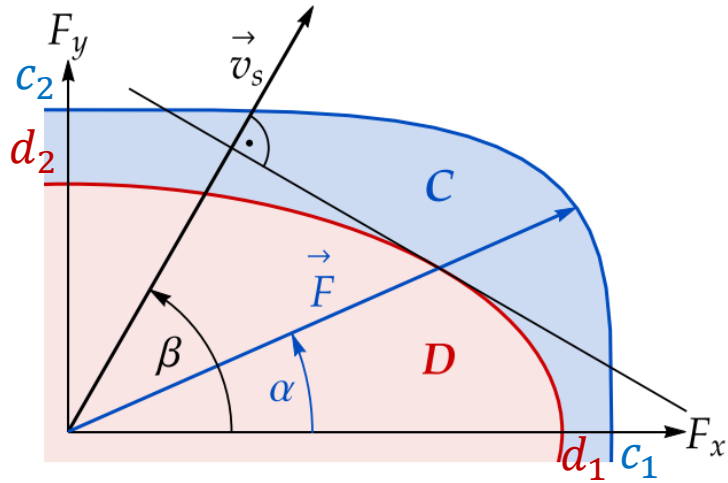
Statyczne położenie równowagi



Trajektoria okresowa



# Model tarcia anizotropowego



$C$  – hodograf siły tarcia  
 $D$  – potencjał poślizgu  
 $\alpha$  – kierunek siły tarcia  
 $\beta$  – kierunek poślizgu  
 $\vec{v}_s$  – prędkość poślizgu  
 $\vec{F}$  – siła tarcia

Składowe wektora siły tarcia  $\vec{F}$ :

$$F_x = r_C(\alpha) \cos(\alpha), \quad F_y = r_C(\alpha) \sin(\alpha),$$

Eliptyczny hodograf:

$$r_C(\alpha) = \frac{c_1 c_2}{\sqrt{c_1^2 \sin^2 \alpha + c_2^2 \cos^2 \alpha}}$$

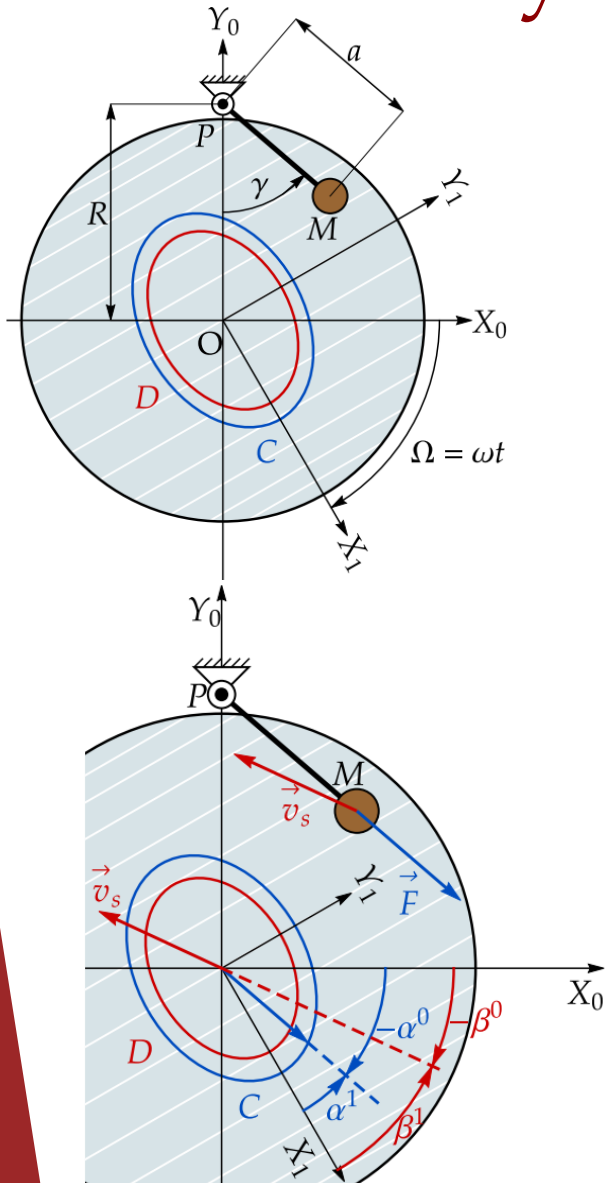
Eliptyczna reguła poślizgu:

$$\sin \alpha = \alpha_{\sin}(\beta), \quad \cos \alpha = \alpha_{\cos}(\beta).$$

$$\alpha_{\sin}(\beta) = \frac{\sin \beta}{\sqrt{\delta_D^4 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta}}, \quad \alpha_{\cos}(\beta) = \frac{\delta_D^2 \cos \beta}{\sqrt{\delta_D^4 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta}}$$

$$\delta_D = d_1/d_2$$

# Model fizyczny i matematyczny układu



Równanie dynamiki w nieruchomym układzie  $X_0OY_0$ :

$$J \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = F_x^0 a \cos \gamma + F_y^0 a \sin \gamma$$

Siła tarcia w układzie  $X_1OY_1$  związanym ze stołem:

$$F_x^1(\beta^1) = r_C(\beta^1) \alpha_{\cos}(\beta^1), \quad F_y^1(\beta^1) = r_C(\beta^1) \alpha_{\sin}(\beta^1).$$

Kierunek poślizgu

$$\beta^1 = \arctan \left( \frac{-v_y^1}{-v_x^1} \right),$$

$$v_x^0 = \frac{d\gamma}{dt} a \cos \gamma - \omega (R - a \cos \gamma), \quad v_y^0 = \frac{d\gamma}{dt} a \sin \gamma + \omega (a \sin \gamma).$$



# Układ z tarciem izotropowym

Model tarcia izotropowego:

$$\hat{r}_C(\beta^1) = 1, \quad \alpha_{\cos}(\beta^1) = \cos(\beta^1), \quad \alpha_{\sin}(\beta^1) = \sin(\beta^1).$$

Równanie dynamiki dla tarcia izotropowego:

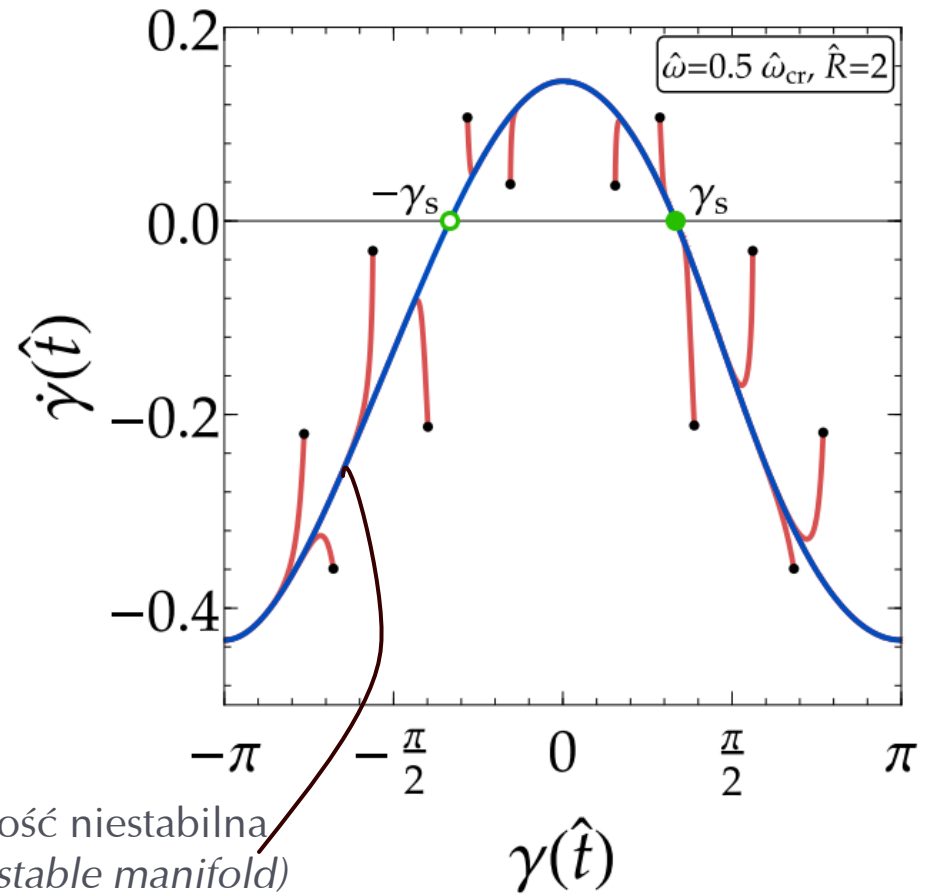
$$\ddot{\gamma} = \frac{\hat{R}\hat{\omega} \cos \gamma - \dot{\gamma} - \hat{\omega}}{\sqrt{\hat{\omega}^2 (\hat{R}^2 - 2\hat{R} \cos \gamma + 1) - 2\hat{\omega}\dot{\gamma}(\hat{R} \cos \gamma - 1) + \dot{\gamma}^2}}$$

Stabilne położenie równowagi:

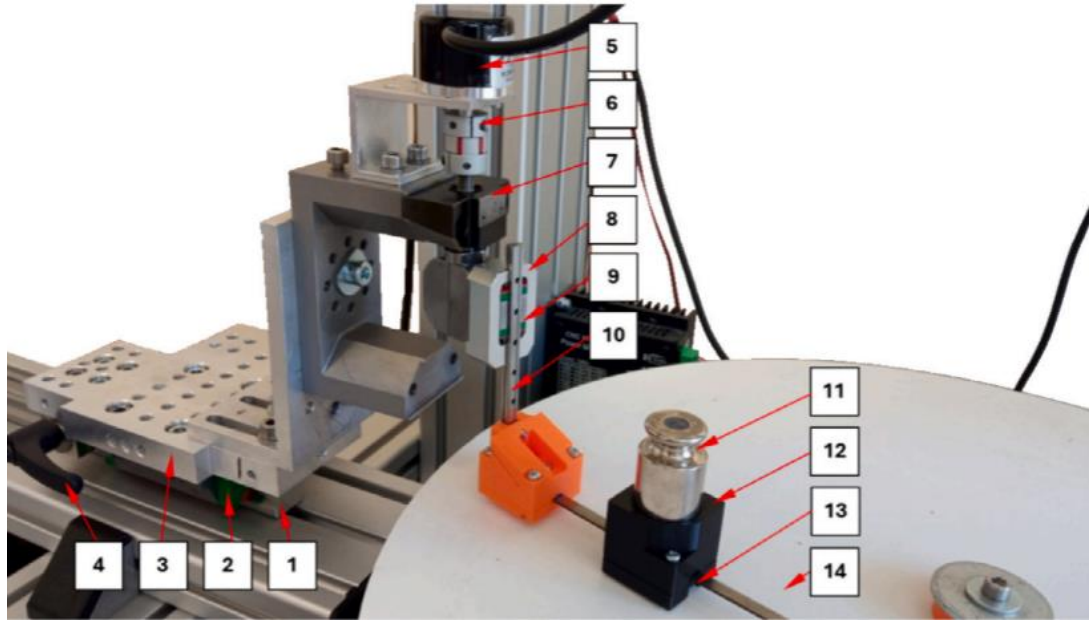
$$\gamma_s = \arccos(1/\hat{R})$$

Krytyczna prędkość obrotowa stołu, powyżej której w ruchu przejściowym pojawiają się oscylacje:

$$\hat{\omega}_{cr} = \frac{1}{2\sqrt{(\hat{R}^2 - 1)}}$$



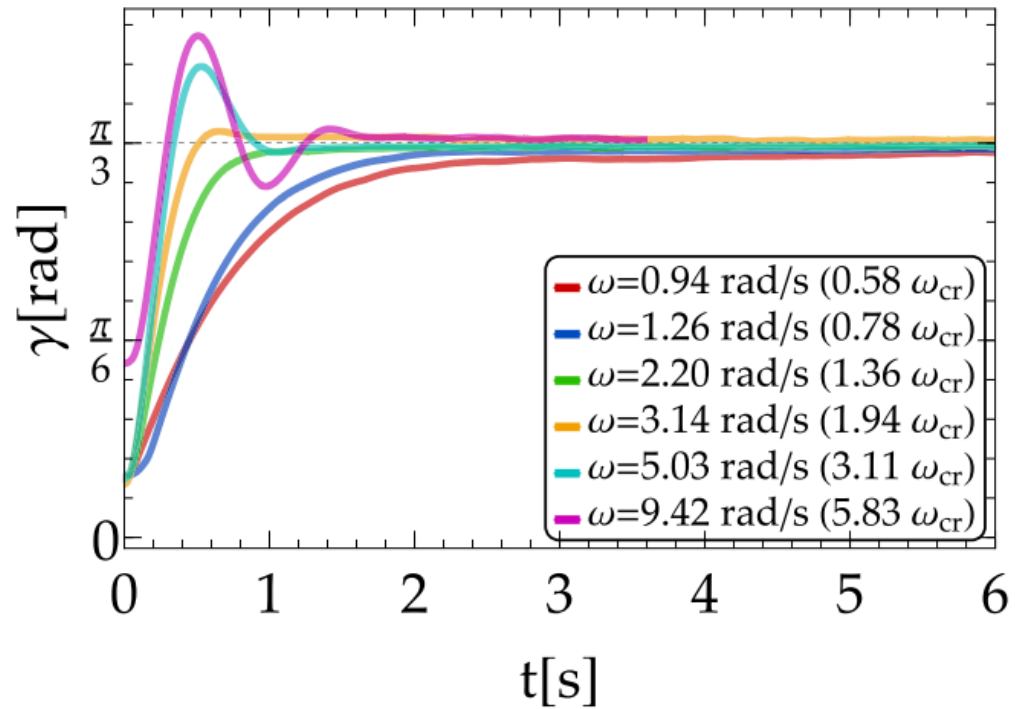
# Układ z tarciem izotropowym



Stanowisko laboratoryjne: (1) szyna prowadząca; (2) wózek liniowy; (3) wspornik; (4) hamulec ręczny; (5) enkoder; (6) sprzęgło; (7) blok łożyskowy; (8) uchwyt łożyska liniowego; (9) łożysko liniowe; (10) prowadnica w kształcie litery L; (11) obciążnik; (12) uchwyt próbki; (13) próbka; (14) obrotowy stół.



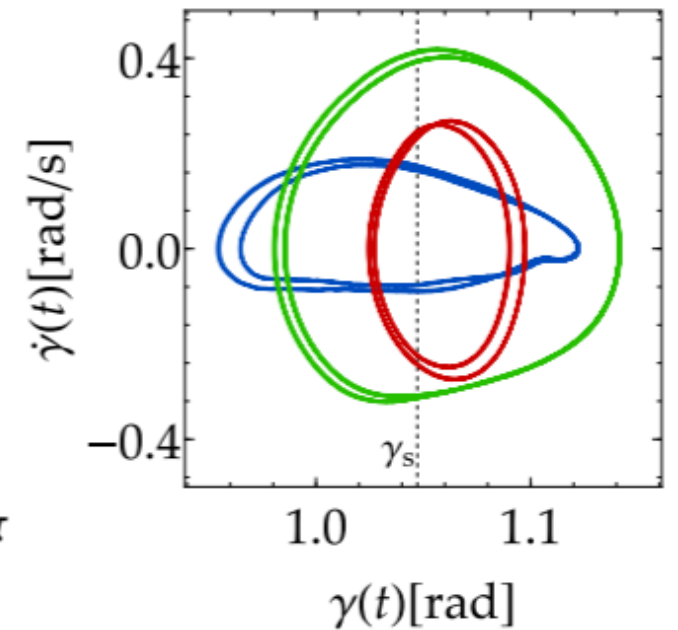
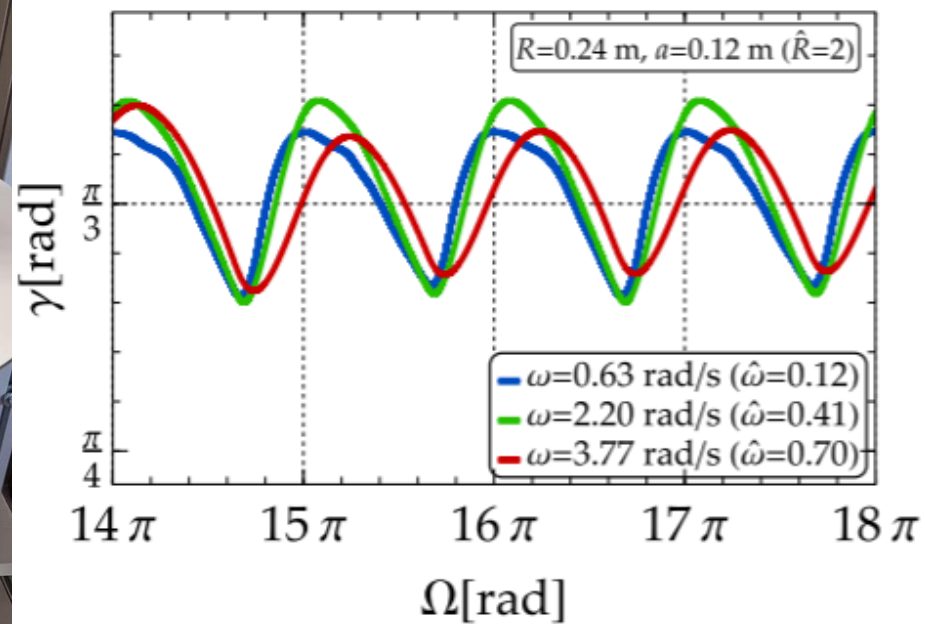
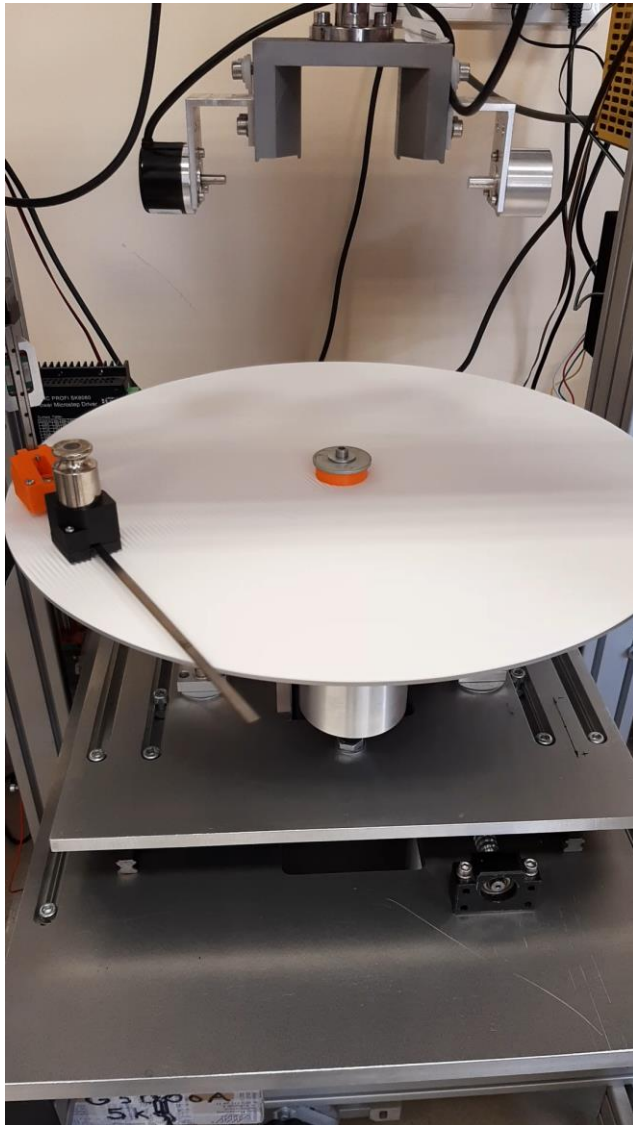
# Układ z tarciem izotropowym



Wyniki doświadczalne dla układu z parą  
cierną papier-papier.



# Układ z tarciem anizotropowym



Wyniki doświadczalne dla układu z parą cierną  
filc-tekturna falista

# Układ z tarciem anizotropowym

Model tarcia anizotropowego:

$$\hat{r}_C = \frac{r_C}{c_1} = \frac{\hat{c}_2}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \hat{c}_2^2 \cos^2 \alpha}}, \quad \alpha_{\sin}(\beta) = \frac{\sin \beta}{\sqrt{\delta_D^4 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta}}, \quad \alpha_{\cos}(\beta) = \frac{\delta_D^2 \cos \beta}{\sqrt{\delta_D^4 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta}},$$

Równanie dynamiki dla tarcia anizotropowego:

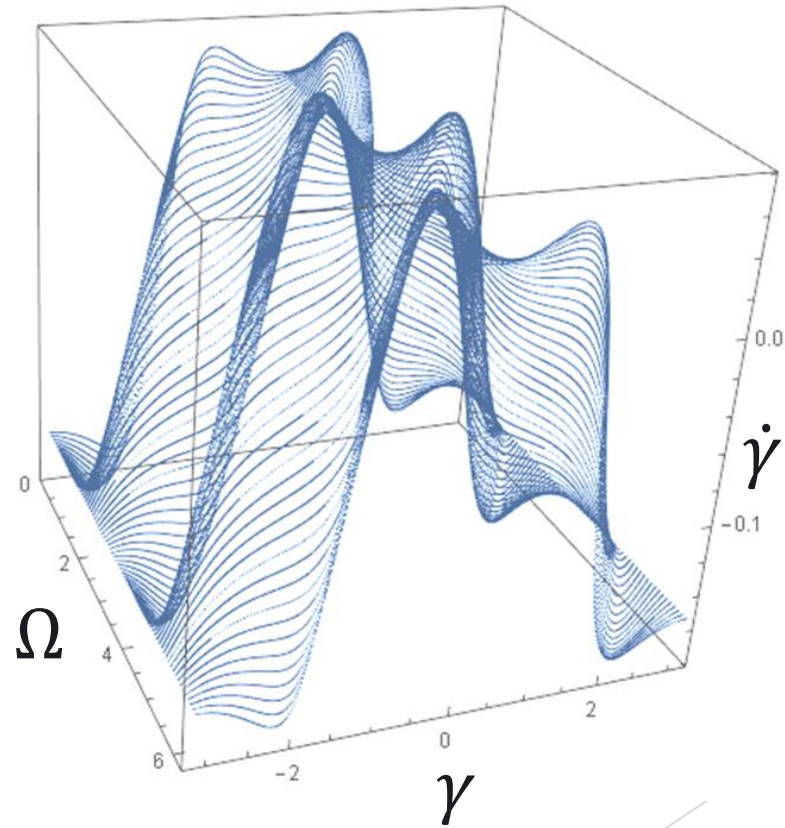
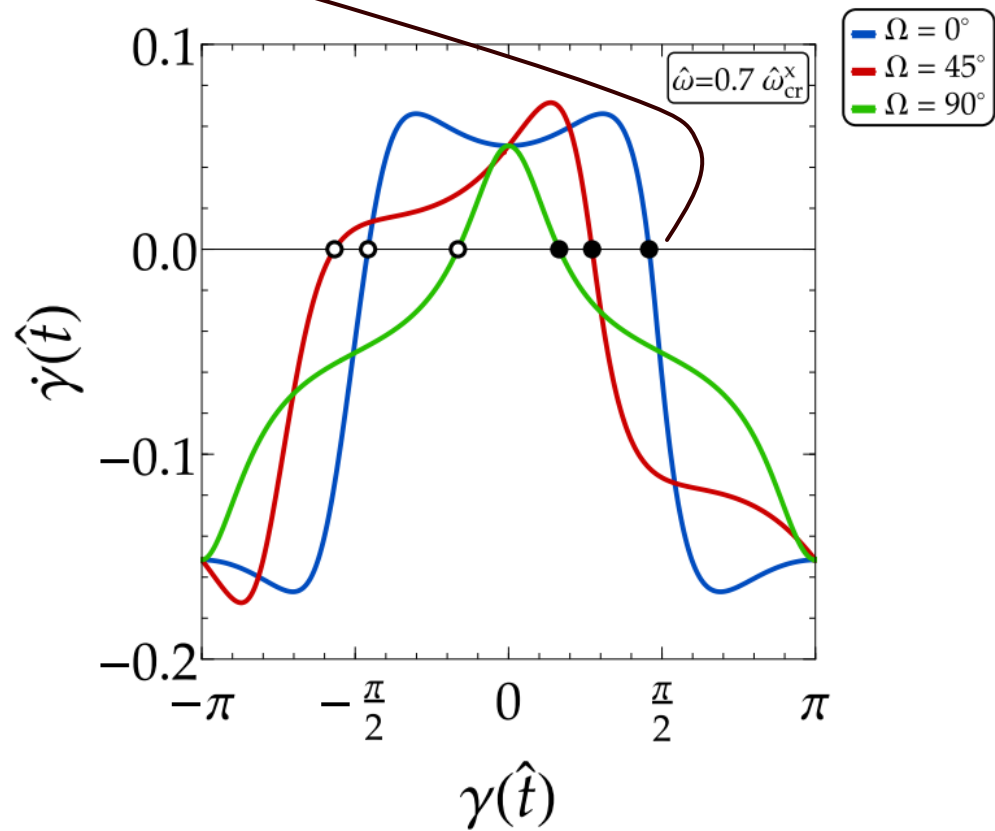
$$\ddot{\gamma} = -\frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left[ \hat{c}_2 (\hat{\omega} (1 + \delta_D^2 - \hat{R}(1 + \delta_D^2) \cos \gamma + (\delta_D^2 - 1) \cos(2\hat{\omega}\hat{t} + 2\gamma) + \hat{R} \cos(2\hat{\omega}\hat{t} + \gamma) - \hat{R}\delta_D^2 \cos(2\hat{\omega}\hat{t} + \gamma) + (1 + \delta^2 + (\delta^2 - 1) \cos(2\hat{\omega}\hat{t} + 2\gamma))\dot{\gamma}) \right]$$

gdzie:

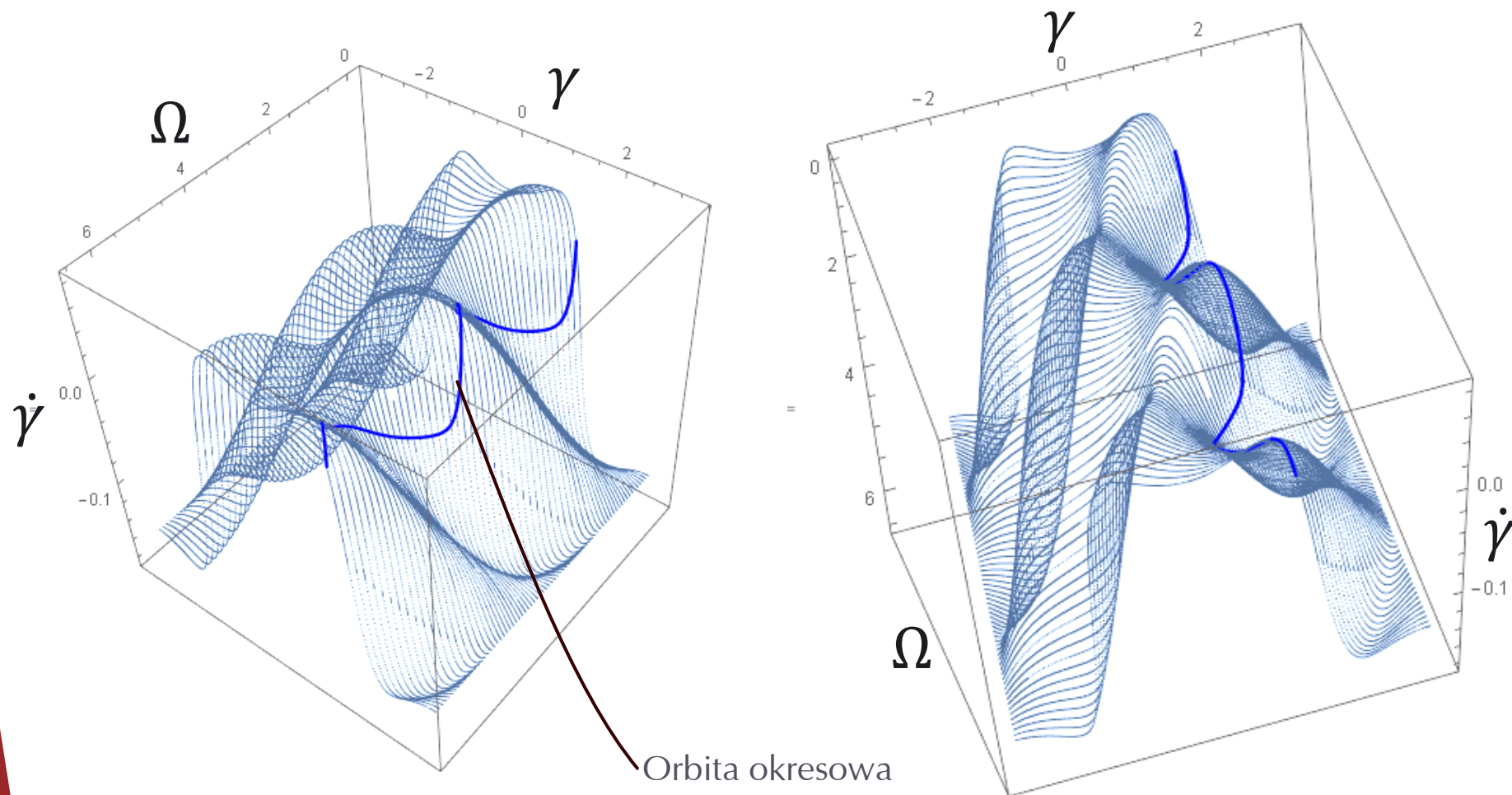
$$\Delta = \hat{c}_2^2 \delta_D^4 \left[ \hat{\omega} (-\hat{R} \cos(\hat{\omega}\hat{t}) + \cos(\hat{\omega}\hat{t} + \gamma)) + \cos(2\hat{\omega}\hat{t} + \gamma) \dot{\gamma} \right]^2 + \left[ \hat{\omega} (-\hat{R} \sin(\hat{\omega}\hat{t}) + \sin(\hat{\omega}\hat{t} + \gamma)) + \sin(\hat{\omega}\hat{t} + \gamma) \dot{\gamma} \right]^2$$

# Układ z tarciem anizotropowym

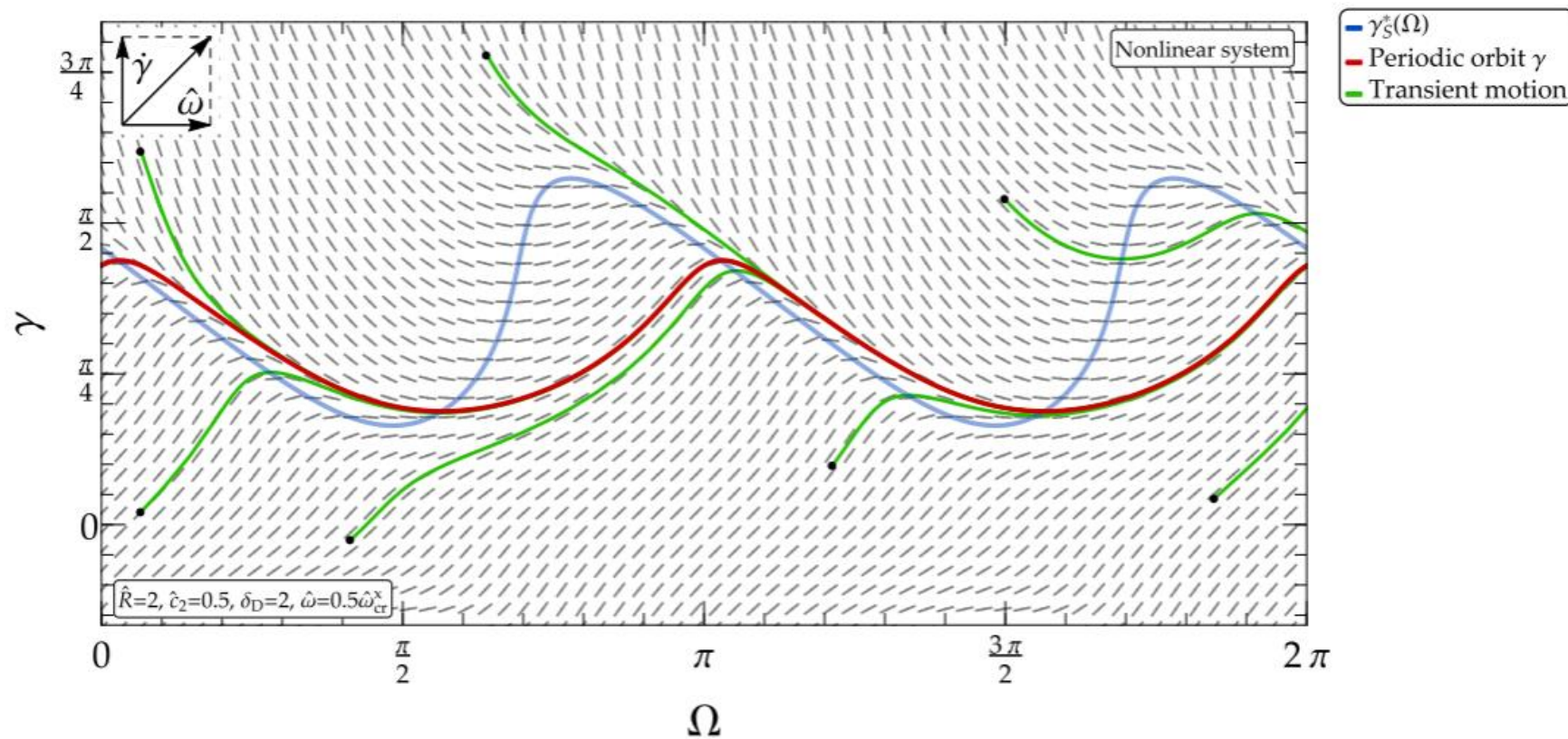
$\gamma_s^*$  – „wędrujące” położenie równowagi



# Rozmaitość niestabilna - anizotropia



# Pole wektorowe dla rozmaitości niestabilnej obliczone numerycznie



# Układ z tarciem anizotropowym - linearyzacja

$$\ddot{\tilde{\gamma}} + p(\Omega)\dot{\tilde{\gamma}} + q(\Omega)\tilde{\gamma} = Q(\Omega), \quad \tilde{\gamma} = \gamma - \gamma_s, \quad \Omega = \hat{\omega}t,$$

gdzie

$$p(\Omega) = \frac{c_2 \delta_D^2 \hat{R} (\hat{R}^2 - 1) \left( 2\sqrt{\hat{R}^2 - 1} (c_2^2 \delta_D^2 - 1) \sin(2\Omega) + (\hat{R}^2 - 2) (c_2^2 \delta_D^2 - 1) \cos(2\Omega) + \hat{R}^2 (c_2^2 \delta_D^2 + 1) \right)}{2\hat{\omega} (\Delta_1)^{3/2} (\Delta_2)^{3/2}},$$

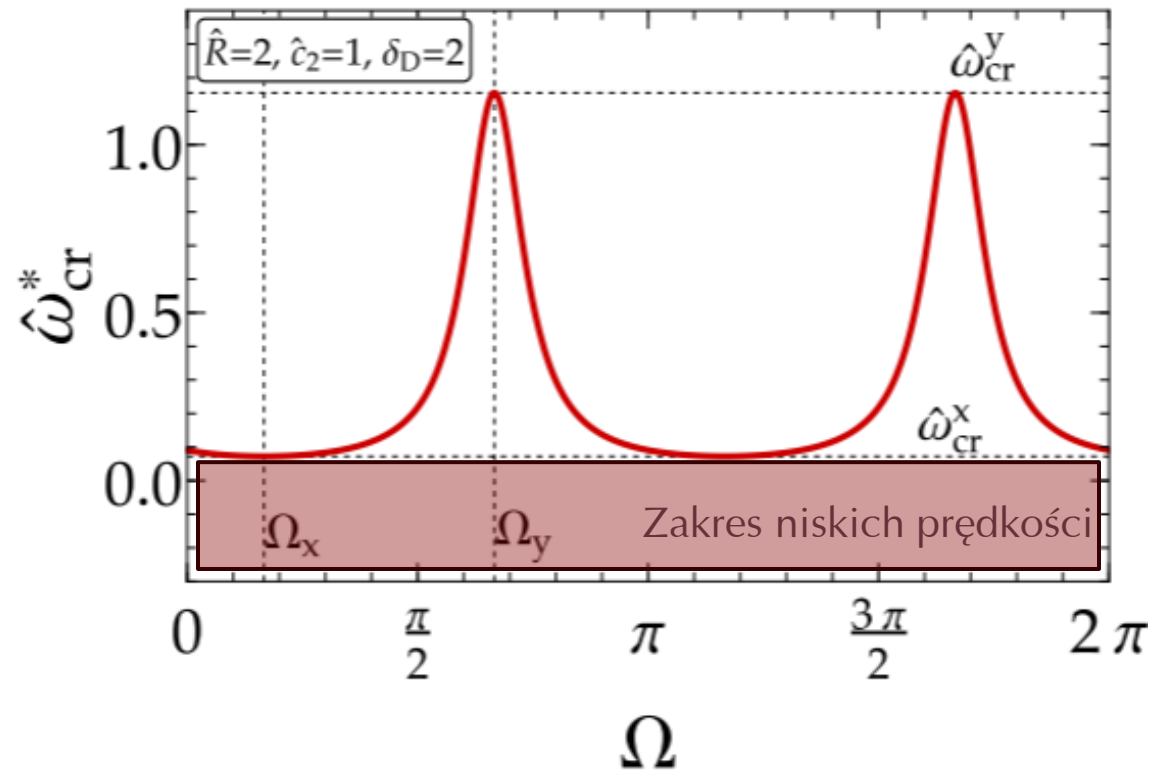
$$q(\Omega) = \frac{c_2 \left( 2(\delta_D^2 - 1)(\hat{R}^2 - 1) \sin(2\Omega) + (\delta_D^2 - 1)(\hat{R}^2 - 2) \sqrt{\hat{R}^2 - 1} \cos(2\Omega) + (\delta_D^2 + 1) \sqrt{\hat{R}^2 - 1} \hat{R}^2 \right)}{2\hat{R} \sqrt{\Delta_1} \sqrt{\Delta_2}},$$

$$Q(\Omega) = \frac{c_2 (\delta_D^2 - 1) \left( 2(\hat{R}^2 - 1) \cos(2\Omega) - (\hat{R}^2 - 2) \sqrt{\hat{R}^2 - 1} \sin(2\Omega) \right)}{2\hat{R} \sqrt{\Delta_1} \sqrt{\Delta_2}},$$

$$\Delta_1 = \delta_D^4 \left( \sqrt{\hat{R}^2 - 1} \sin(\Omega) + (\hat{R}^2 - 1) \cos(\Omega) \right)^2 + \left( \hat{R}^2 (-\sin(\Omega)) + \sqrt{\hat{R}^2 - 1} \cos(\Omega) + \sin(\Omega) \right)^2,$$

$$\Delta_2 = \frac{2\sqrt{\hat{R}^2 - 1} (c_2^2 \delta_D^4 - 1) \sin(2\Omega) + (\hat{R}^2 - 2) (c_2^2 \delta_D^4 - 1) \cos(2\Omega) + \hat{R}^2 (c_2^2 \delta_D^4 + 1)}{2(\delta_D^4 - 1) \sqrt{\hat{R}^2 - 1} \sin(2\Omega) + (\delta_D^4 - 1)(\hat{R}^2 - 2) \cos(2\Omega) + (\delta_D^4 + 1) \hat{R}^2}.$$

# Układ z tarciem anizotropowym - linearyzacja



$$\hat{\omega}_{cr}^x = \frac{1}{2\sqrt{(\hat{R}^2 - 1)\delta_D^2}},$$

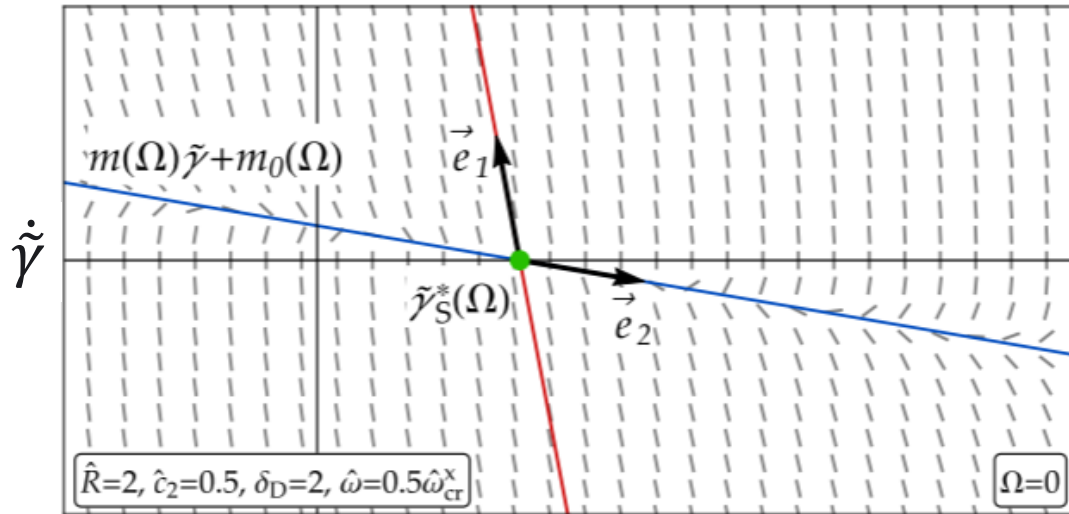
$$\hat{\omega}_{cr}^y = \frac{\delta_D^2 \sqrt{\hat{c}_2}}{2\sqrt{(\hat{R}^2 - 1)}}.$$

Chwilowa prędkość krytyczna

# Redukcja układu zlinearyzowanego

(ang. *reduced order parametric model*)

$$\ddot{\tilde{\gamma}} + p(\Omega)\dot{\tilde{\gamma}} + q(\Omega)\tilde{\gamma} = Q(\Omega), \quad \tilde{\gamma} = \gamma - \gamma_s, \quad \Omega = \hat{\omega}t, \quad \hat{\omega} < \hat{\omega}_{cr}^x$$



Wolniejszy kierunek własny:

$$\vec{e}_2 = \left[ -\frac{\sqrt{p(\Omega)^2 - 4q(\Omega)} + p(\Omega)}{2q(\Omega)}, 1 \right]^T,$$

Dynamika zredukowana do wolniejszego kierunku własnego:

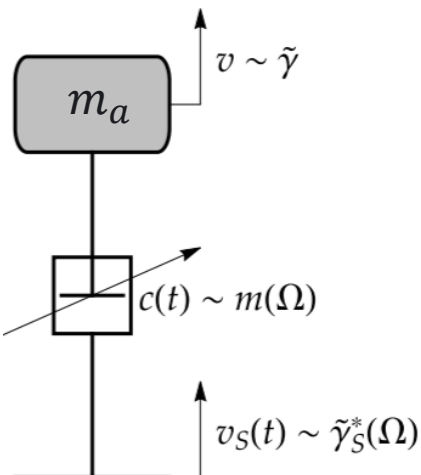
$$\dot{\tilde{\gamma}} = m(\Omega)\tilde{\gamma} + m_0(\Omega) = m(\Omega)(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_s^*(\Omega)),$$

$$m(\Omega) = -\frac{2q(\Omega)}{\sqrt{p(\Omega)^2 - 4q(\Omega)} + p(\Omega)},$$

$$m_0(\Omega) = -m(\Omega)\tilde{\gamma}_s^*(\Omega), \quad \tilde{\gamma}_s^*(\Omega) = -\frac{Q(\Omega)}{q(\Omega)},$$

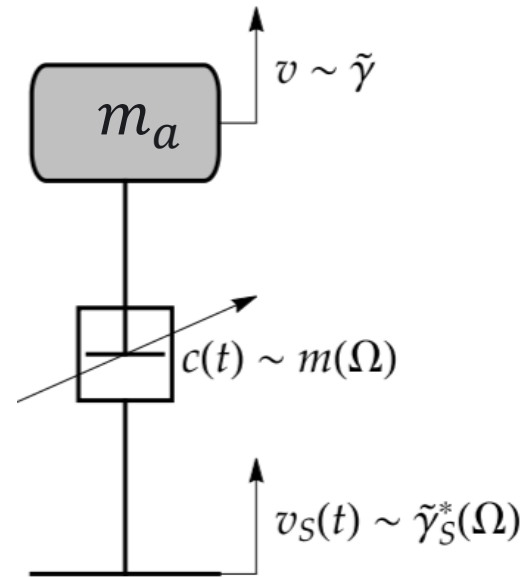
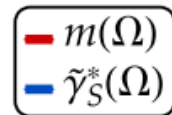
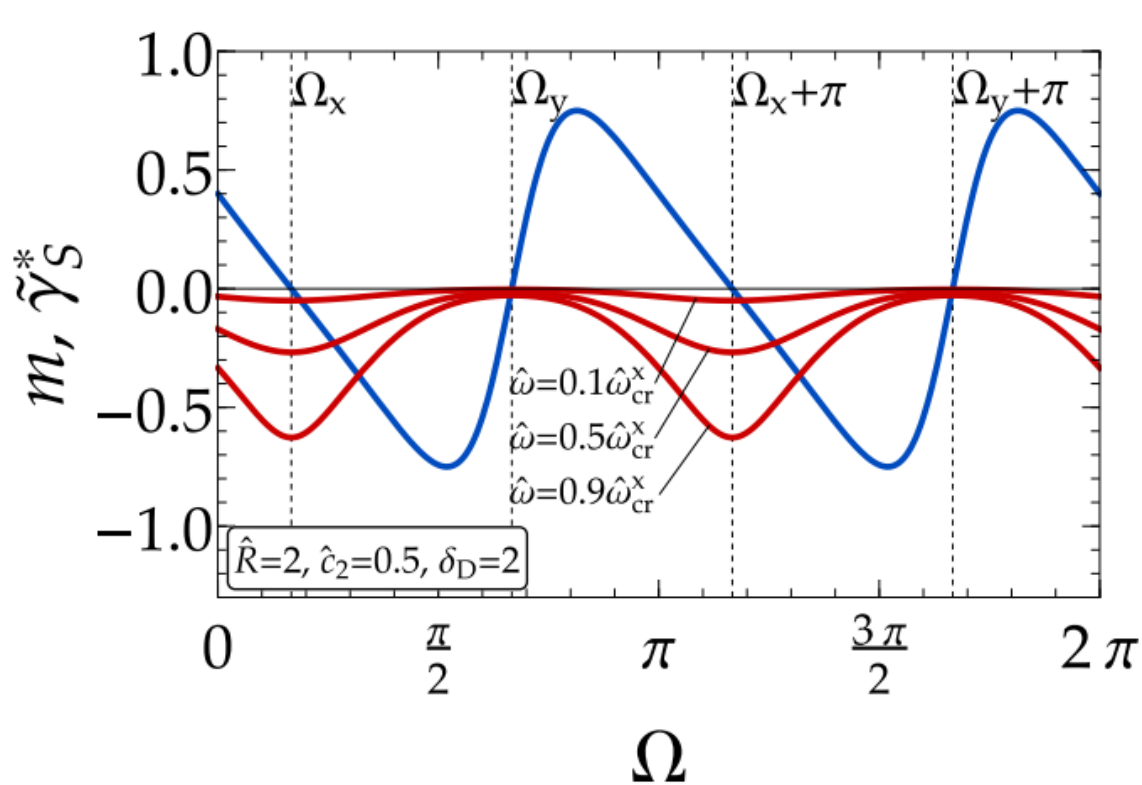
$$\dot{\tilde{\gamma}} = m(\Omega)(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_s^*(\Omega))$$

$$m_a \dot{v} = -c(t)(v - v_s(t))$$



# Redukcja układu zlinearyzowanego

(ang. *reduced order parametric model*)



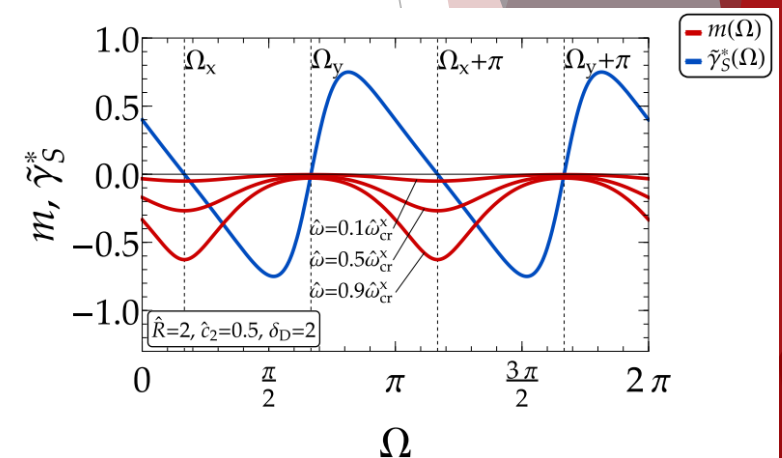
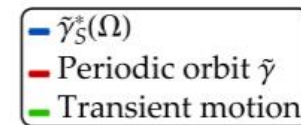
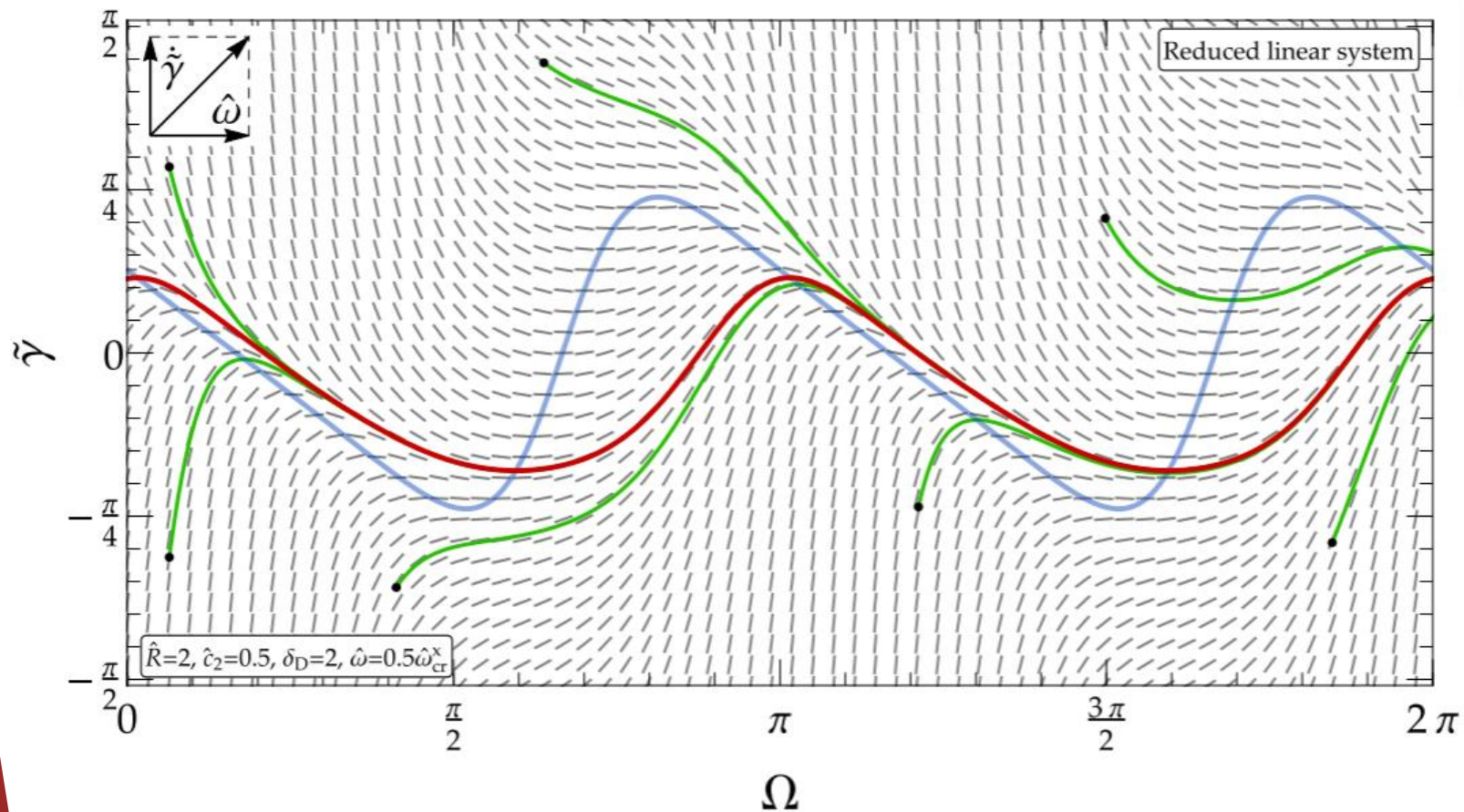
$$\ddot{\tilde{\gamma}} = m(\Omega)(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_S^*(\Omega))$$

$$m_a \dot{v} = -c(t)(v - v_s(t))$$

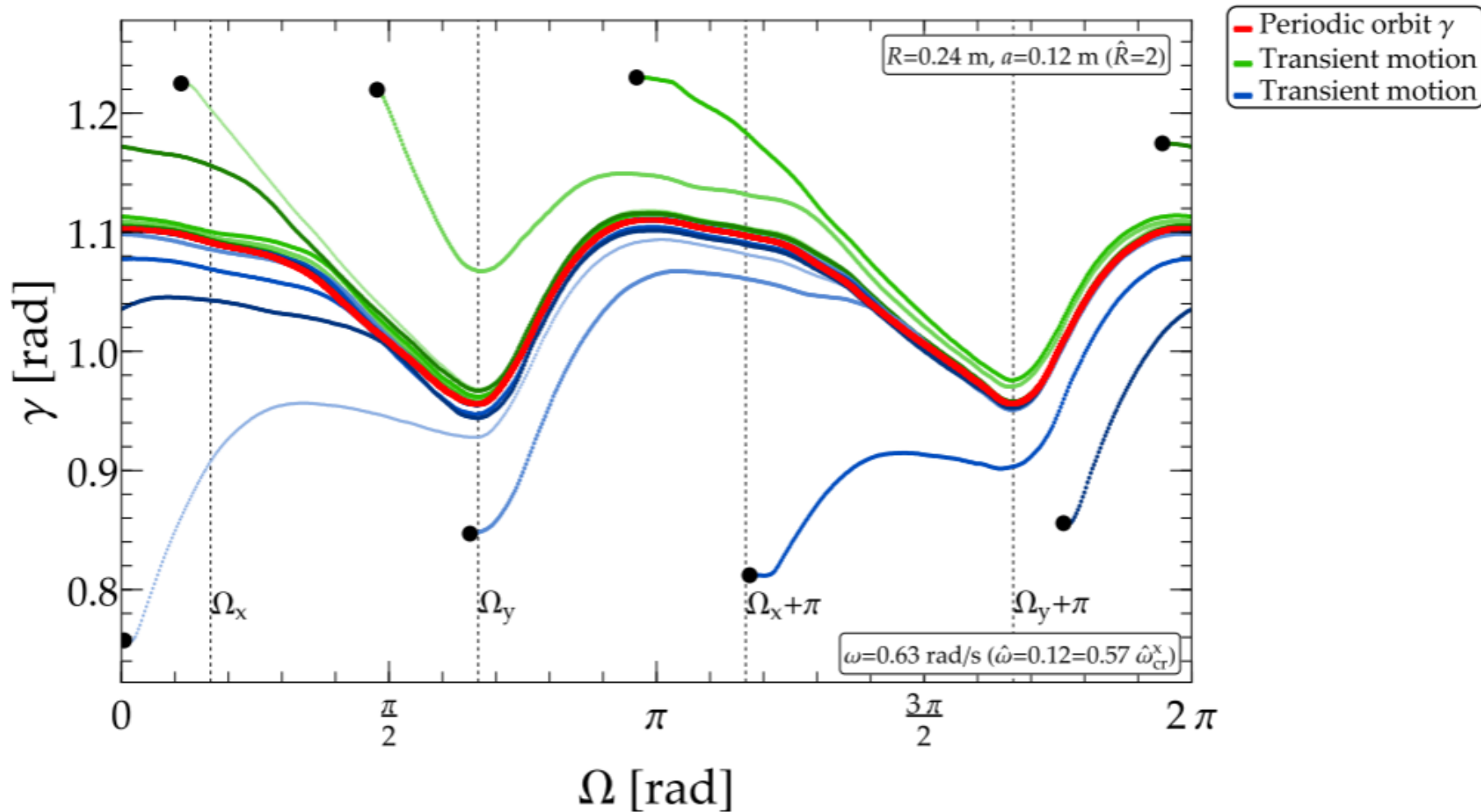
# Redukcja układu zlinearyzowanego

(ang. *reduced order parametric model*)

$$\dot{\tilde{\gamma}} = m(\Omega)\tilde{\gamma} + m_0(\Omega) = m(\Omega)(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_s^*(\Omega)),$$



# Orbita okresowa i ruch przejściowy - eksperyment



# Publikacje

- ❁ Wijata, A., 2025. **Can Anisotropic Friction Induce Chaos in a Horizontal Pendulum on a Rotating Disk?**, w: Perlikowski, P., et al.(Eds.), Monografia Interdyscyplinarna. Badania i Innowacje w Naukach Inżynieryjno-Technicznych, Ścisłych i Przyrodniczych Oraz Społecznych. Matter - Process - Innovation. Łódź, str. 121–145.  
<https://doi.org/10.34658/9788367934886.w1.4.121-145>
- ❁ Wijata, A., Awrejcewicz, J., Witkowski, K., 2025. **Anisotropic vs . isotropic friction : New theoretical results verified experimentally exhibited by a horizontal pendulum on the rotating disk.** Mechanism and Machine Theory 209, 106004.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2025.106004>
- ❁ Wijata, A., Stańczyk, B., Awrejcewicz, J., 2024. **Empirical mathematical model for describing anisotropic dry friction forces.** Tribology International 192, 109324.  
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2024.109324>
- ❁ Wijata, A., 2020. **Modelowanie matematyczne i badania doświadczalne anizotropowego tarcia suchego** (rozprawa doktorska), Politechnika Łódzka

Dziękuję za uwagę !