

Dynamika nieliniowej belki wspornikowej z konkurującymi mechanizmami sztywności: analiza i walidacja eksperymentalna

P. Olejnik*, M. Umer, J. Jabłoński

Katedra Automatyki, Biomechaniki i Mechatroniki
Wydział Mechaniczny PŁ



10 marca 2026 r.

* prelegent

Plan prezentacji

- 1 Motywacja i problem fizyczny
- 2 Modelowanie nieliniowe i dynamika modelu zredukowanego
- 3 Walidacja eksperymentalna z wykorzystaniem szybkiej wizji
- 4 Interpretacja diagnostyczna konkurujących mechanizmów sztywności

Motywacja i model fizyczny

- Smukłe belki wspornikowe wykazują wyraźną nieliniowość geometryczną.
- Klasyczna geometrycznie nieliniowa teoria Eulera–Bernoulliego przewiduje zachowanie typu utwardzającego (z j. ang. *hardening*).
- W eksperymentach często obserwuje się zmiękczenie lub mieszane odpowiedzi nieliniowe.
- Model belki Eulera–Bernoulliego — przypadek planarny, zginanie tylko w płaszczyźnie ruchu osi belki.
- Umiarkowane ugięcia poprzeczne — pomija się bezwładność obrotową, ugięcia boczne i odkształcenia postaciowe.
- Wyidealizowane warunki zamocowania.

Cel

Wyjaśnienie konkurujących mechanizmów sztywności z wykorzystaniem analitycznie uchwytnej jednowymiarowego modelu zredukowanego o pojedynczym stopniu modalnym, zweryfikowanego eksperymentalnie.

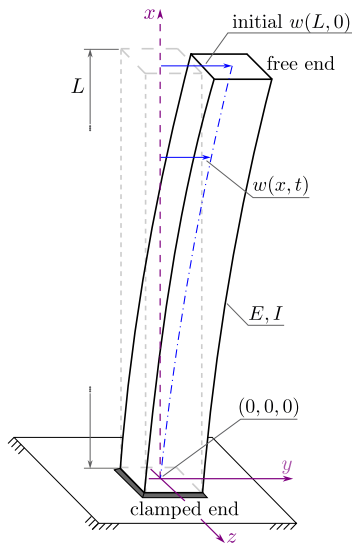
- 1 Dokładny jednomodalny model zredukowany wyprowadzony bezpośrednio z nieliniowej kinematyki belki.
- 2 Idealny model analityczny wykorzystany jako diagnostyczny model odniesienia poprzez analizę rozbieżności struktury modelu.
- 3 Pomiary wizyjne wsparte sztuczną siecią neuronową, ujawniające jakościowe przejście typu utwardzanie–zmiękczenie.

Nieliniowe równanie ruchu smukłej belki wspornikowej

Równanie PDE:

$$m w_{tt} + EI w_{xxxx} + \frac{m}{2} \partial_x \left[w_x \int_x^L \partial_{tt} \left(\int_0^\eta w_x^2 d\xi \right) d\eta \right] + EI \partial_x \left[w_x \partial_x (w_x w_{xx}) \right] = 0.$$

- warunki brzegowe odpowiadają belce wspornikowej:
zamocowanie w $x = 0$, koniec swobodny w $x = L$;
 - $w(x, t)$ – poprzeczne przemieszczenie osi belki;
 - m – masa na jednostkę długości, EI – sztywność zginania;
- (i) mw_{tt} — człon bezwładnościowy rozłożonej masy;
 - (ii) EIw_{xxxx} — liniowy człon sztywności zginania;
 - (iii) trzeci człon — dynamicznie indukowana siła osiowa związana z nieliniowością geometryczną;
 - (iv) czwarty człon — nieliniowa sztywność geometryczna wynikająca ze sprzężenia krzywizny z odkształceniem osiowym.



Jednomodalna aproksymacja Galerkina

$$w(x, t) = v(t) \phi_1(x), \quad \phi_1(0) = \phi_1'(0) = 0.$$

Rzutowanie na pierwszy mod zginania

$$\int_0^L \text{PDE}(w) \phi_1(x) dx = 0.$$

Otrzymany model zredukowany (ROM)

$$\ddot{v} + \sigma_1 v + \sigma_2 v^3 + \sigma_3 v \dot{v}^2 + \sigma_4 v^2 \ddot{v} = 0,$$

$v(t)$ jest współrzędną modalną proporcjonalną do przemieszczenia końca belki $w(L, t)$.

Współczynniki σ_i wyznaczone są z całek przestrzennych funkcji kształtu $\phi_1(x)$ (patrz *Appl. Sci.* 2026, 16(1), 479; <https://doi.org/10.3390/app16010479>, Appendix A).

Interpretacja fizyczna członów modelu:

- $\sigma_1 v$ — liniowa sztywność zginania,
- $\sigma_2 v^3$ — nieliniowa sztywność geometryczna,
- $\sigma_3 v \dot{v}^2, \sigma_4 v^2 \ddot{v}$ — nieliniowa bezwładność.

Kluczowa obserwacja:

- struktura równania PDE zostaje zachowana w modelu zredukowanym,
- nie wprowadza się dodatkowych członów nieliniowych,
- równość $\sigma_3 = \sigma_4$ wynika naturalnie z wprowadzenia.

$$\ddot{v} + \sigma_1 \dot{v} + \sigma_2 v^3 + \sigma_3 v \dot{v}^2 + \sigma_4 v^2 \ddot{v} = 0$$

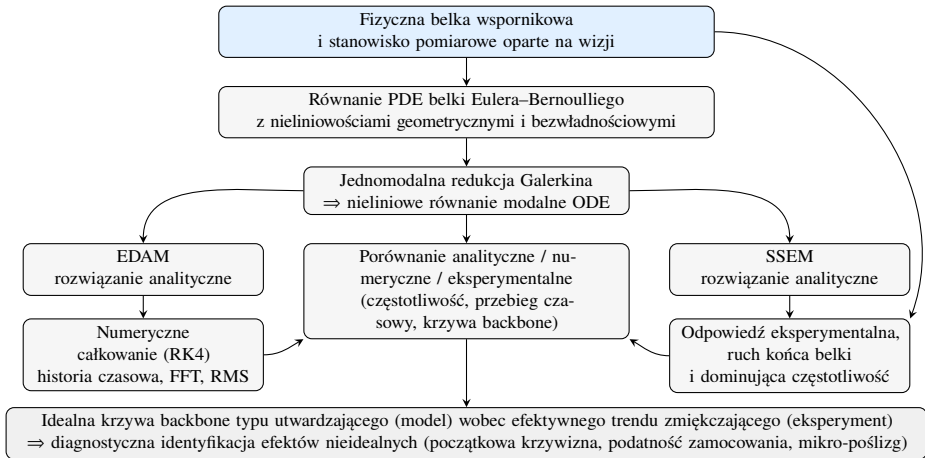
$$\sigma_1 = \frac{K}{M} = 12.36, \quad \sigma_2 = \frac{\beta}{M} = 40.44, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \frac{\alpha}{M} = 4.60$$

Pochodzenie współczynników

Stałe M , K , α i β wyznacza się z zależności całkowych wynikających z jednomodalnej projekcji Galerkinia równania PDE.

Przy normalizacji $\phi_1(L) = 1$ współrzędna modalna spełnia $w(L, t) = v(t)$, a podane współczynniki odpowiadają pierwszemu modowi zginania belki wspornikowej.

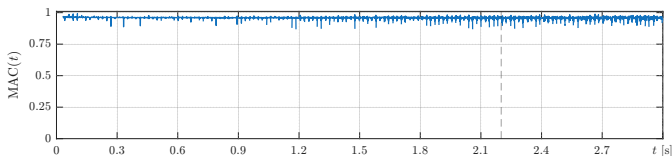
Schemat koncepcyjny badań



Rys. 2 Od nieliniowego modelowania równaniem PDE do dynamiki modelu zredukowanego i walidacji eksperymentalnej.

Uzasadnienie redukcji jednomodalnej

- Dominację pierwszego modu zginania potwierdza $\text{med}_{t \in [2.2, 3.0]_s} (\text{MAC}(t)) \approx 0.96$, gdzie współczynnik MAC obliczany jest według klasycznego kryterium zgodności modalnej
$$\text{MAC}(t) = \frac{|\mathbf{w}_{\text{exp}}(t)^\top \boldsymbol{\phi}_1|^2}{(\mathbf{w}_{\text{exp}}(t)^\top \mathbf{w}_{\text{exp}}(t))(\boldsymbol{\phi}_1^\top \boldsymbol{\phi}_1)}$$
.
- Wyraźna separacja spektralna pomiędzy pierwszym i wyższymi modami zginania.
- Brak wewnętrznych węzłów w zmierzonych polach deformacji.



Rys. 3 Przebieg czasowy współczynnika MAC pomiędzy eksperymentalnym profilem ugięcia a analitycznym kształtem pierwszego modu w przedziale $t \in [0, 3]$ s.

Wniosek

Dynamika eksperymentalna jest zdominowana przez pierwszy mod zginania, co uzasadnia zastosowanie jednomodalnego modelu zredukowanego.

Bezwymiarowa postać modelu i kalibracja eksperymentalna

$$\tau = \omega_{\text{ref}} t, \quad \omega_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad v(\tau) = \frac{w(L, t)}{L}$$

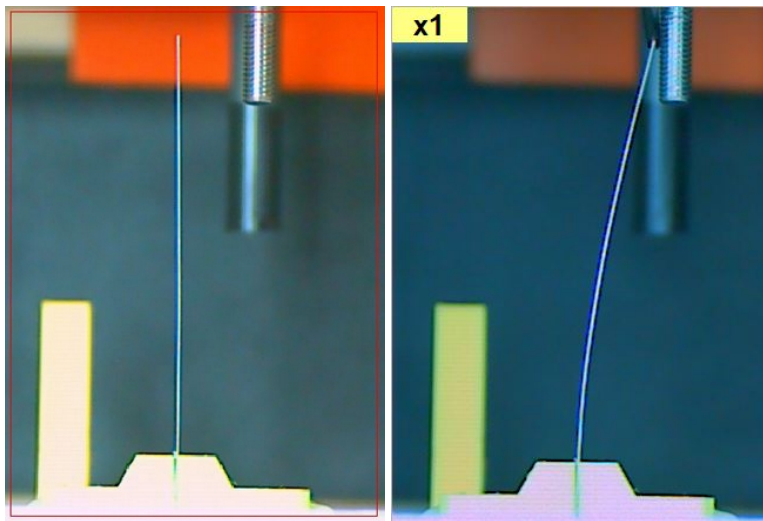
- Naturalna skala częstości wynikająca z równowagi wymiarowej między sztywnością zginania, bezwładnością i długością.
- Model zredukowany rozwiązywany w bezwymiarowym czasie τ .
- Odpowiedź fizyczna odzyskiwana poprzez transformację $t = \tau/\omega_{\text{ref}}$.

Kalibracja eksperymentalna

Sztywność zginania EI wyznaczono na podstawie eksperymentalnie zmierzonej częstotliwości podstawowej f_1 , co umożliwia estymację modułu Younga E .

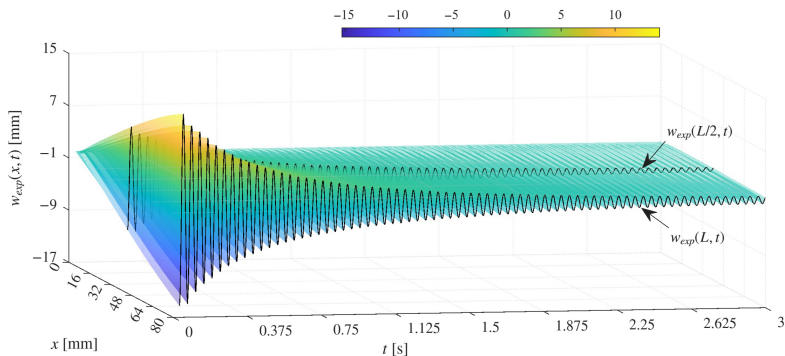
Walidacja

Przykroje analityczne i wyniki eksperymentalne porównywane są bezpośrednio w **dziedzinie częstości**.



Rys. 4 Pomiar swobodnych drgań z wykorzystaniem szybkiego systemu wizyjnego.

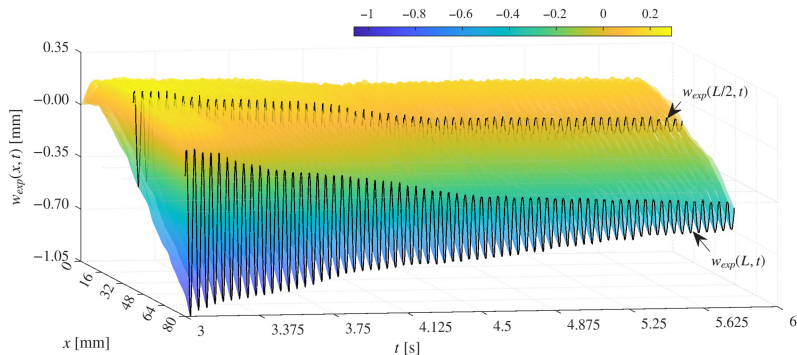
Obserwacje eksperymentalne i walidacja



Rys. 5 Zrekonstruowana czasowo-przestrzenna ewolucja przemieszczenia poprzecznego wzdłuż krawędzi belki, uzyskana z pomiarów wizyjnych w przedziale czasu $t = 0-3$ s.

- Pełna odpowiedź czasowo-przestrzenna: faza przejściowa \rightarrow dynamika quasi-ustalona.
- Dominacja pierwszego modu zginania widoczna w polu deformacji (brak węzłów wewnętrznych).
- Identyfikacja częstotliwości wykonana oddzielnie w przedziale $t \in [2.2, 3.0]$ s (FFT).

Obserwacje eksperymentalne i walidacja



Rys. 6 Zrekonstruowana czasowo-przestrzenna ewolucja przemieszczenia poprzecznego wzdłuż krawędzi belki, uzyskana z pomiarów wizyjnych w przedziale czasu $t = 3\text{--}6$ s.

- Śledzenie krawędzi przy użyciu autorskiego algorytmu wizyjnego opartego na YOLO.
- Wysoka dokładność pomiaru nawet dla małych amplitud drgań poniżej 1 mm.
- Wykres ilustruje precyzję detekcji krawędzi, a nie przedział identyfikacji częstotliwości.

Zidentyfikowane częstotliwości w stanie quasi-ustalonym

Seria	$w_{\text{exp}}(L, 0)$ [mm]	f_{exp} [Hz]	ζ [-]
I	-15.27	24.0550	4.6×10^{-3}
II	-12.46	24.3802	4.1×10^{-3}
III	-16.19	24.3327	6.6×10^{-3}
IV	-8.31	24.2695	8.6×10^{-3}

Na podstawie częstotliwości podstawowej wyznaczono efektywną sztywność zginania EI , a następnie oszacowano moduł Younga E .

Pole przemieszczeń wzdłuż krawędzi belki zrekonstruowano z pomiarów szybkiego systemu wizyjnego, natomiast dominujące częstotliwości zidentyfikowano na podstawie sygnału przemieszczenia końca belki $w_{\text{exp}}(L, t)$. Identyfikację częstotliwości przeprowadzono wyłącznie w quasi-ustalonym przedziale odpowiedzi $t \in [2.2, 3.0]$ s z użyciem jednolitej procedury przetwarzania: resamplingu do jednorodnej siatki czasowej, okna Hann, wyboru maksimum widma FFT w zadanym paśmie oraz lokalnego doprecyzowania częstotliwości metodą najmniejszych kwadratów.

Współczynniki tłumienia wyznaczono w tym samym przedziale czasu metodą dekrementu logarytmicznego i aproksymacji obwiedni sygnału.

Nieliniowe przesunięcie częstotliwości w modelu analitycznym

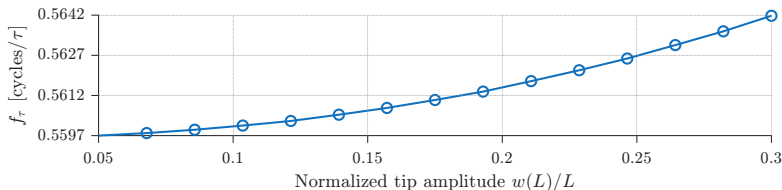
- Model zredukowany przewiduje zależność częstotliwości drgań od amplitudy.
- Dominująca częstotliwość wyznaczana jest z odpowiedzi ustalonej $v(\tau)$ metodą okresu przejść przez zero (zero-crossing).
- Wraz ze wzrostem amplitudy drgań obserwuje się monotoniczny wzrost częstotliwości.

Interpretacja fizyczna

Rozciąganie osi obojętnej podczas dużych ugięć wprowadza dodatkową sztywność osiową, która zwiększa efektywną sztywność dynamiczną belki.

Otrzymujemy klasyczną nieliniowość typu **utwardzającego (hardening)**, charakterystyczną dla geometrycznie nieliniowej belki wspornikowej.

Krzywa backbone modelu zredukowanego (ROM)



Krzywa backbone (charakterystyka amplitudowo–częstotliwościowa) i jej zmienne:

$$v_{\max} = \frac{w(L)}{L}, \quad f_\tau = f_\tau(v_{\max}), \quad \omega(v_{\max}) \sim \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}(v_{\max})}{m_{\text{eff}}(v_{\max})}}.$$

Interpretacja

W układzie nieliniowym efektywna sztywność zależy od amplitudy, dlatego częstość drgań również staje się funkcją amplitudy.

Jeśli w modelu idealnym częstość rośnie wraz z amplitudą to powstaje *nieliniowość typu utwardzającego*.

Interpretacja modelu zredukowanego

$$\omega(v) \sim \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}(v)}{m_{\text{eff}}(v)}} = \sqrt{\frac{\sigma_1 + \sigma_2 v^2}{1 + \sigma_4 v^2}}.$$

- $k_{\text{eff}}(v) = \sigma_1 + \sigma_2 v^2$ — amplitudo-zależna sztywność
- $m_{\text{eff}}(v) = 1 + \sigma_4 v^2$ — amplitudo-zależna bezwładność

Granica małych amplitud

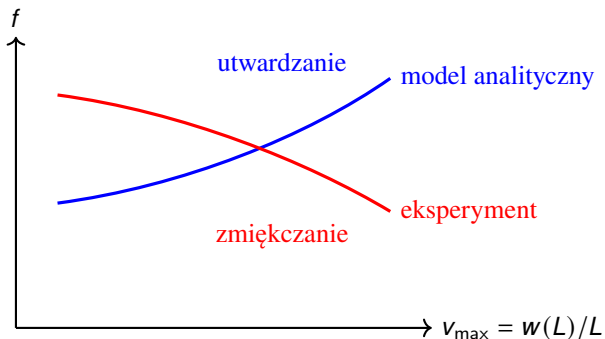
$$\omega \approx \sqrt{\sigma_1}$$

Zmiana charakteru drgań przy większych amplitudach

- Wzrost efektywnej sztywności → **hardening**.
- Spadek efektywnej sztywności → **softening**.

To właśnie częstotliwość zależna od amplitudy generuje **krzywą backbone**.

Konkurujące mechanizmy nieliniowej sztywności



Interpretacja

Model idealny przewiduje nieliniowość typu utwardzającego, natomiast eksperyment ujawnia efektywne zmiękczenie wynikające z nieidealności konstrukcji.

Dlaczego nie wyznaczamy eksperymentalnej krzywej backbone?

- W badanym eksperymencie obserwujemy **drżenia swobodne z tłumieniem**.
- Amplituda drgań maleje w czasie, dlatego układ nie osiąga stanu ustalonego o zadanej amplitudzie.
- Z tego powodu bezpośrednio wyznaczenie krzywej backbone $f(A)$ z pojedynczego przebiegu nie jest możliwe.

Zastosowana strategia

Porównujemy częstotliwości zidentyfikowane w quasi-ustalonych fragmentach odpowiedzi dla różnych amplitud początkowych.

Pomimo niewielkich odchyień, uzyskane punkty wskazują wyraźny trend **zmiękczający** (spadek częstotliwości wraz ze wzrostem amplitudy), odmienny od utwardzającej charakterystyki modelu idealnego.

Dodatkowy wynik: identyfikacja EI i estymacja E

Częstotliwość podstawowa z eksperymentu

$$f_1 \approx 24.2 \text{ Hz}$$

$$\omega_1 = 2\pi f_1$$

Relacja modalna

$$\omega_1 = (\lambda_1 L)^2 \omega_{\text{ref}}$$

$$\lambda_1 L \approx 1.875$$

Skala czasu modelu

$$\omega_{\text{ref}} = \frac{\omega_1}{(\lambda_1 L)^2}$$

$$\approx 43.3 \text{ rad/s}$$

Sztywność zginania

$$EI = mL^4 \omega_{\text{ref}}^2$$

$$\approx 3.16 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Moment bezwładności

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\approx 1.53 \times 10^{-14} \text{ m}^4$$

Moduł Younga

$$E = \frac{EI}{I}$$

$$\approx 206 \text{ GPa}$$

- 1 Zachowawczy jednomodalny model zredukowany stanowi przejrzysty punkt odniesienia dla dynamiki nieliniowej belki wspornikowej i przewiduje utwardzającą charakterystykę idealnej belki geometrycznie nieliniowej.
- 2 Porównanie z eksperymentami wizyjnymi ujawnia wyraźne jakościowe odstępstwo od idealnej odpowiedzi utwardzającej, przejawiające się efektywnym zmiękczeniem.
- 3 Niezgodność pomiędzy modelem analitycznym a eksperymentem pełni rolę wskaźnika diagnostycznego obecności mechanizmów nieidealnych (początkowa krzywizna, podatność zamocowania, mikro-poślizg).
- 4 Wizyjne śledzenie krawędzi szybką kamerą umożliwia bezkontaktową identyfikację dominacji modalnej i zmian częstotliwości, wspierając walidację modelu zredukowanego bez stosowania czujników kontaktowych.
- 5 Na podstawie eksperymentalnie zmierzonej częstotliwości podstawowej wyznaczono efektywną sztywność zginania EI oraz oszacowano moduł Younga E .
- 6 Zaproponowane podejście stanowi podstawę do dalszych rozszerzeń modelu, w szczególności o tłumienie, interakcje wielomodalne oraz kontakt cierny.

Dziękuję za uwagę!



Więcej informacji w tym temacie można znaleźć w publikacji:

Olejnik, P., Umer, M., Jabłoński, J.

*Exact Analytical Solutions for Free Single-Mode Nonlinear Cantilever Beam Dynamics:
Experimental Validation Using High-Speed Vision.*

Applied Sciences 2026, 16, 479.

doi:10.3390/app16010479