Analiza i optymalizacja układów mechatronicznych i mikrosystemów MT WEEiA (II)

P. Olejnik

10 grudnia 2024

IV. Mnożniki Lagrange'a w optymalnym sterowaniu układem dynamicznym drugiego rzędu przy niezerowych warunkach początkowych

Dany jest obiekt sterowania o transmitancji

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + b} \,. \tag{1}$$

Podaj optymalny algorytm sprowadzania (sterowania) odpowiedzi układu dynamicznego (1) - umieszczonego w pętli zamkniętej, do stanu $\bar{x}(\infty) = 0$, po wymuszeniu tego układu wywołanym niezerowymi warunkami początkowymi $\bar{x}_0$, $\dot{\bar{x}}_0$. Algorytm powinien minimalizować (optymalizować) wskaźnik jakości procesu:

$$J = \int_0^\infty f_0(\bar{x}, u) dt = \int_0^\infty \left(\|\bar{x}\|^2 + \gamma u^2 \right) dt \,, \tag{2}$$

gdzie: $a > 0$, $b \neq 0$, $\gamma > 0$, $\bar{x}(t) = (x_1, x_2)^T$ reprezentuje wektor stanu, $u(t)$ jest poszukiwanym, jednowymiarowym wektorem sterowania.

Stan $X(s)$ obiektu sterowania danego wzorem (1) w przestrzeni zmiennej zespolonej s zapisujemy wzorem

$$X(s) = \frac{a}{s^2 + b} U(s). \tag{3}$$

Przejście do dziedziny czasu ciągłego przebiega następująco

$$\begin{aligned} X(s)\left(s^2+b\right) &= aU(s) \\ \mathcal{L}^{-1}/ \quad s^2X(s)+bX(s) &= aU(s) \end{aligned}$$

co prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu

$$\ddot{x}(t)+bx(t)=au(t)\,. \tag{4}$$

Wykonując podstawienia $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$ zapisujemy

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= -bx_1+au\,, \end{cases} \tag{5}$$

przy zerowych warunkach początkowych $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$.

Prześledźmy transformację Laplace'a równania (4) przy niezerowych warunkach początkowych, tzn. $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, gdzie $x_{10} \neq 0$, $x_{20} \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}/ \quad \ddot{x}(t)+bx(t) &= au(t) \\ s^2X(s)-sx_1(0)-x_2(0)+bX(s) &= aU(s) \\ :\left(s^2+b\right)/ \quad X(s)\left(s^2+b\right) &= aU(s)+x_{10}s+x_{20}, \end{aligned}$$

skąd uzyskujemy sumę transmitancji

$$X(s)=G_1(s)U(s)+G_2(s)\delta(s)=\frac{a}{s^2+b}U(s)+\frac{x_{10}s+x_{20}}{s^2+b}\delta(s)\,. \tag{6}$$

Widać zatem, że transmitancja (3) zmiennej stanu $X(s)$ uległa modyfikacji po uwzględnieniu warunków początkowych. Symbolicznie wprowadzono funkcję sygnału impulsowego $\delta(s)$ równą 1 w pierwszej iteracji procedury całkowania numerycznego, oznaczającą konieczność wprowadzenia drugiego wejścia do układu. Znalezioną postać operatorową (6) należy wykorzystać w Xcosie przy budowaniu (danego w treści zadania laboratoryjnego) modelu symulacyjnego zamkniętego układu sterowania.

Optymalny sygnał sterujący $u(t)$ obliczymy przy użyciu mnożników Lagrange'a. Poszukiwanie minimum funkcji podcałkowej (2) rozpoczynamy od zapisania funkcji Lagrange'a

$$L=f_0(\bar{x},u)+\bar{\mu}\bar{G}, \tag{7}$$

gdzie $\bar{\mu} = [\mu_1, \mu_2]$ to wektor mnożników Lagrange'a o wymiarze równym liczbie równań odpowiadających ograniczeniom $\bar{G}$, nałożonym na funkcję podcałkową f_0 daną równaniem (2). W tym przypadku, reprezentacja układu dynamicznego w przestrzeni zmiennych stanu, wyrażona układem dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu definiuje pierwsze dwa równania Eulera-Lagrange'a, które są tożsame z równaniami ograniczeń:

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 + bx_1 - au \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Na tej podstawie można rozwinąć równanie (7), jak następuje:

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \gamma u^2 + \mu_1 (\dot{x}_1 - x_2) + \mu_2 (\dot{x}_2 + bx_1 - au) . \tag{9}$$

Zgodnie z teorią, pełny zestaw równań Eulera-Lagrange'a przedstawia się następująco:

$$G_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2 , \tag{10a}$$
$$G_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = -bx_1 + au , \tag{10b}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \dot{\mu}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mu}_1 = 2x_1 + b\mu_2 , \tag{10c}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \dot{\mu}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mu}_2 = 2x_2 - \mu_1 , \tag{10d}$$
$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\gamma u - a\mu_2 = 0 . \tag{10e}$$

Korzystając z równania (10e), eliminujemy w równaniu (10b) zmienną zależną u, po czym zapisujemy układ czterech równań różniczkowych w postaci macierzowej:

$$\begin{gathered} \dot{\bar{z}} = Az , \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & \frac{a^2}{2\gamma} \\ 2 & 0 & 0 & b \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} . \end{gathered} \tag{11}$$

Na podstawie równania charakterystycznego $w_\lambda = A - \lambda I = 0$ macierzy A wyznacza się jej wartości własne $\lambda_{1,2,3,4}$ dane wzorami:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{2\gamma}\left(a\sqrt{a^2 - 4\gamma(b+1)} + a^2 - 2b\gamma\right)} \\ \lambda_{3,4} &= \pm\sqrt{-\frac{1}{2\gamma}\left(a\sqrt{a^2 - 4\gamma(b+1)} - a^2 + 2b\gamma\right)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Wybierając szczególny obiekt sterowania o transmitancji $G(s)$ (zbiór zadań [1]), której parametry to np. $a = b = 1$ i parametr $\gamma = 1/9$, oznaczający wskaźnik jakości procesu (funkcji celu), otrzymuje się następujące wartości własne:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{2} \\ \lambda_{3,4} &= \pm\sqrt{5}. \end{aligned} \tag{13}$$

Następnie wybieramy tylko te wartości własne, które zapewniają stabilność układu sterowania, tj. λ_2 i λ_4. Zgodnie z teorią układów liniowych, rozwiązanie $x_1(t)$ (wyjście obiektu sterowania włączonego w układ sterowania z ujemnym sprzężeniem zwrotnym) uzyskuje postać:

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} + \alpha_2 e^{-\sqrt{5}t}. \tag{14}$$

Stąd na podstawie równań (14), (10)a i (10)e zapisujemy:

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = -\sqrt{2}\alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} - \sqrt{5}\alpha_2 e^{-\sqrt{5}t} \tag{15a}$$

$$\mu_2(t) = \frac{2}{9}u(t) = \frac{2}{9}\left(\dot{x}_2(t) + x_1(t)\right) = \frac{2}{3}\alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} + \frac{4}{3}\alpha_2 e^{-\sqrt{5}t}, \tag{15b}$$

Wykorzystując równania (14) i (15a) obliczamy niewiadome

$$\alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} = \frac{\sqrt{5}x_1(t) + x_2(t)}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}, \quad \alpha_2 e^{-\sqrt{5}t} = \frac{\sqrt{2}x_1(t) + x_2(t)}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}, \tag{16}$$

które podstawiamy do równania (15b), otrzymując poszukiwany mnożnik Lagrange'a $\mu_2(t)$. W konsekwencji, przebieg czasowy sygnału sterującego

$$u(t) = \frac{9}{2}\mu_2(t) = -2.00x_1(t) - 1.83x_2(t). \tag{17}$$

Zadanie laboratoryjne

W symulacji numerycznej opisywanego wyżej układu sterowania optymalnego przyjmij:

- ◇ krok czasowy symulacji numerycznej $h = 0.001$ sek.
- ◇ dane w przykładzie obliczeniowym, takie jak parametry obiektu regulacji i parametr wskaźnika jakości procesu sterowania
- ◇ warunki początkowe $x_{10} = x_{20} = 1$

- $\diamond$ końcowy czas symulacji $t_k = 7\,\text{sek}$.
- $\diamond$ obiekt o transmitancji $G(s)$ danej wzorem (6) umieszczony w zamkniętej pętli sterowania (podpowiedź: wykorzystaj sterowanie $u(t)$ uzyskane w przykładzie obliczeniowym)
- $\diamond$ oznacz na schemacie wyjście obiektu regulacji przez x_1, a pochodną tego sygnału, jako x_2.

W opracowaniu z przebiegu zajęć laboratoryjnych opisz:

a) przedstawiony problem optymalizacyjny;

b) metody wykorzystane do rozwiązania tego problemu;

c) stosując funkcję „dscr()” oblicz w Scilabie dyskretne transmitancje $G_i(z) = \mathcal{Z}[G_i(s)]$ $(i = 1, 2)$, przyjmując krok dyskretyzacji $h = 0.001$;

d) narysuj schemat blokowy diagramu symulacyjnego, który rozwiązuje dynamikę analizowanego układu przy pomocy obliczonych składowych $G_i(z)$ sygnału $X(s)$;

e) oblicz w programie Maxima do obliczeń symbolicznych wartości własne dane równaniem (12);

f) narysuj trajektorię odpowiedzi czasowej układu sterowania, poddanego optymalizacji w omawianym przykładzie obliczeniowym.

Podaj przynajmniej 3 zdania wniosków z przeprowadzonego eksperymentu numerycznego, dotyczące nabytych umiejętności i przyswojonej wiedzy.

Odpowiedz na następujące pytania: 1) Do jakiej wartości ustalonej $x_{1\mathrm{u}}$ zbiega charakterystyka $x_1(t)$ jeśli $t \to \infty$? 2) Jakiej chwili czasowej odpowiada przejście odpowiedzi $x_1(t)$ w stan ustalony przy założeniu, że przedział ε jej zbieżności to $x_{1\mathrm{u}} \pm 0.001 x_{10}$?

Literatura

[1] K. Rumatowski, A. Królikowski, A. Kasiński: *Optymalizacja układów sterownia. Zadania.* WNT Warszawa, 1984.