

Analiza i optymalizacja układów mechatronicznych i mikrosystemów MT WEEiA (II)

P. Olejnik

10 grudnia 2024

III. Aktywna regulacja położenia względnego w układzie dynamicznym o wielu stopniach swobody

Metody aktywnej regulacji można adoptować do optymalizacji układów mechanicznych lub biomechanicznych o wielu stopniach swobody wymuszanych w sposób impulsowy. Sterowanie odpowiedzią dynamiczną struktur tego typu zyskuje szersze znaczenie w kontekście rozwoju technik optymalizacyjnych i metod komputerowych rozwijanych i testowanych na komputerach wyposażonych w szybkie, wielordzeniowe i wielowątkowe procesory współpracujące z wydajnymi układami graficznymi i wysokoczęstotliwościowymi pamięciami pozwalającymi na dynamiczne alokowanie liczb i tablic wielowymiarowych.

Ten wykład opisuje metodę opartą na zastosowaniu siły sterującej zmniejszającej względną deformację modelu mechanicznego klatki piersiowej człowieka wywołaną uderzeniem sprężystym pochodzącym od siły zewnętrznej. Wirtualny wzbudnik wywierający siłę sterującą zmniejszającą odkształcenie analizowanego układu dynamicznego o trzech stopniach swobody umieszczono pomiędzy masą reprezentującą plecy człowieka a nieruchomym sztywnym oparciem. Zmniejszenie przemieszczeń wewnątrz klatki piersiowej (w układzie dynamicznym o wielu stopniach swobody) oszacowano rozwiązując zagadnienie optymalizacji liniowo-kwadratowej wskaźnika wydajności. Rozwiązanie dynamiki badanego układu, równania Rccatiego i minimalizację

funkcji celu $J(t_0, t_k)$ wykonano na podstawie procedur numerycznych napisanych w języku *Python*. Ponadto, oszacowano parametry regulacji kształtujące charakterystykę odpowiedzi optymalnej modelu klatki piersiowej z dołączonym wzbudnikiem, zaproponowano technikę obliczania funkcji celu w układzie nieciągłym na podstawie pewnej estymacji wektora wzmocnienia proporcjonalnego, zamieszczono wykresy odpowiedzi czasowych układu swobodnego i jego odpowiednika z włączoną siłą sterującą, jak też inne wykresy porównawcze.

1 Opis matematyczny

Rysunek ??a przedstawia uproszczony model biomechaniczny tułowia człowieka w pozycji wyprostowanej. Podparcie w postaci masy m_4 zostało utwierdzone a siła u układu sterującego przyłożona pomiędzy tylną ścianą klatki piersiowej a tym oparciem. Masy oznaczone symbolami m_1 , m_2 i m_3 wraz z połączeniami elastycznymi pomiędzy nimi wyróżniają rozważany model klatki piersiowej pokazanej szczegółowo na rysunku ??b. Z zasady równowagi sił w przyjętym układzie dynamicznym zapisuje się trzy równania różniczkowe drugiego i jedno pierwszego rzędu opisujące zmiany położenia punktu x_4 określonego w miejscu połączenia elementu sprężystego k'_{23} i tłumiącego c'_{23} .

Model matematyczny sformułowano w postaci 7 równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\dot{x}_i = x_{i+4}, \quad \text{przy } i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

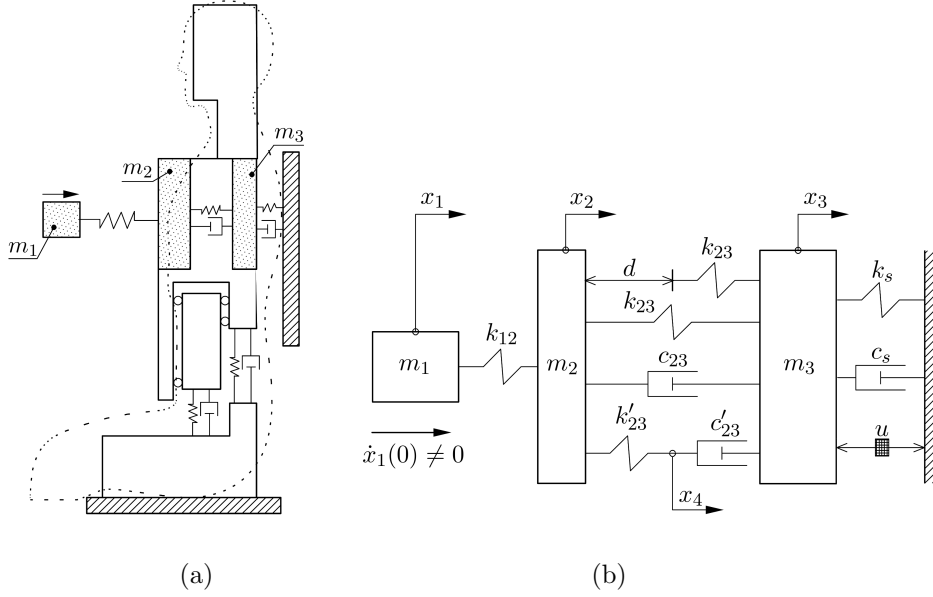
$$\dot{x}_4 = x_7 + \frac{\bar{k}_{23}}{\bar{c}_{23}}(x_2 - x_4), \quad (2)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{m_1}(k_{12}(x_2 - x_1)), \quad (3)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{1}{m_2}(k_{12}(x_1 - x_2) - k_{23}(x_2 - x_3) - \bar{k}_{23}(x_2 - x_4) - c_{23}(x_6 - x_7)), \quad (4)$$

$$\dot{x}_7 = \frac{1}{m_3}(k_{23}x_2 - (k_{23} + k_s)x_3 + c_{23}x_6 - (c_{23} + \bar{c}_{23})x_7 - c_s x_7 + \bar{c}_{23}x_8 - u), \quad (5)$$

gdzie: $m_1 \dots m_3$ oznaczają masy wyróżnionych podukładów, $\bar{k} = [k_{12}, k_{23}, k'_{23}, k_s]$, $\bar{c} = [c_{23}, c'_{23}, c_s]$ są odpowiednio wektorami parametrów sztyw-



Rysunek 1: Uproszczony model biomechaniczny tułowia człowieka w pozycji wyprostowanej (a) i rozważany model klatki piersiowej (b) z masą m_1 uderzającą od jej przedniej strony.

ności i tłumienia, $\bar{x}_d = [x_1 \dots x_4]$ i $\bar{x}_v = [x_5 \dots x_7]$ są odpowiednio wektorami przemieszczeń i prędkości. Należy zaznaczyć, że zmiany położenia punktu x_4 , określonego w miejscu połączenia elementu sprężystego k'_{23} i tłumiącego c'_{23} są opisane za pomocą jednego równania różniczkowego pierwszego rzędu, dlatego model dynamiczny obiektu sterowania określa 7-wymiarowy wektor stanu $\bar{x} = [\bar{x}_d, \bar{x}_v]$.

Badany układ charakteryzują następujące własności reologiczne:

- (R1) szeregowe połączenie elementów sprężystego i tłumiącego za pośrednictwem masy m_5 , jeśli $m_5 = 0$;
- (R2) współczynnik sztywności k_{23} zależny od względnego położenia $x_r = x_2 - x_3$ mierzzonego na wysokości mostka klatki piersiowej pomiędzy przednią (o masie m_2) i tylną (o masie m_3) stroną tułowia, tzn. podwaja wartość $k_{23} = 2k_{23}$, jeśli $x_r \geq d$;
- (R3) współczynnik tłumienia c_{23} zależny od znaku względnej prędkości zmian położenia $v_r = x_6 - x_7$ pomiędzy przednią i tylną stroną tułowia, tzn. podwaja wartość $c_{23} = 2c_{23}$, jeśli $v_r < 0$.

Na podstawie tych własności, sztywność i tłumienie pomiędzy wyróżnionymi masami zmieniają się w sposób skokowy zależnie od efektów ściskania lub rozciągania klatki piersiowej spowodowanych sprężystym uderzeniem masy m_1 . Zmiany parametrów k_{23} i c_{23} stanowią inną postać nieciągłości, która podobnie jak w przypadku tarcia suchego prowadzi do przełączeń pomiędzy równaniami różniczkowymi obowiązującymi w różnych stanach dynamicznych zdeterminowanych własnościami (R2) i (R3). Z tego względu, poddając taki układ dynamiczny optymalizacji stanów dynamicznych (np. minimalizacji odległości $x_2 - x_3$), należy opracować specjalny algorytm sterowania.

2 Zagadnienie optymalizacji liniowo-kwadratowej

Wyprowadzenie modelu dynamicznego wiąże się często z zaawansowanym opisem matematycznym i optymalizacją uwzględniającą pasywną lub aktywną regulację położenia części ciała najbardziej narażonych na uszkodzenie. Ten wykład zawiera opis metody optymalizacji liniowo-kwadratowej. Zastosowanie tej metody doprowadziło do zmniejszenia odkształcenia klatki piersiowej człowieka poddanej uderzeniu sprężystemu masy równej 1.6 [kg]. Wybrana metoda jest dobrze poznana i opisana [?, ?], ale z uwagi na niektóre parametry mechaniczne (tutaj zależne od czasu) badanego układu dynamicznego zmodyfikowano ją w zakresie szacowania wartości wektora wzmocnień proporcjonalnych zamkniętej pętli sterowania. Inną zaletą wybranej metody optymalizacji jest jej odporność na niedokładność oszacowania macierzy współczynników wagowych funkcji celu, nazywanej niekiedy funkcjonalem kosztu. Ponadto, jeśli układ sterowania należy do pewnej klasy układów opisanych w pracach [?, ?], to wspomniana odporność jest zagwarantowana. Warto zaznaczyć, że w istniejącej literaturze nie znaleziono publikacji podejmującej problematykę optymalizacji liniowo-kwadratowej stanu układu mas połączonych elastycznie za pomocą łączników reologicznych. Modelowanie dynamiczne klatki piersiowej człowieka poddanej uderzeniu sprężystemu masy o małym ciężarze rozpatrzono w postaci elastycznie połączonych brył sztywnych o masach skupionych w punktach. Takie podejście stanowi duże uproszczenie układu rzeczywistego, ale jest użyteczne w aspekcie projektowania i testowania struktur regulatorów aktywnych.

Strategię sterowania oparto na modyfikacji standardowej metody optymalizacji liniowo-kwadratowej funkcji celu dla układu sterowania z ujem-

nym sprzężeniem zwrotnym. Współczynnik wzmocnienia proporcjonalnego obliczono na podstawie numerycznego rozwiązania macierzowego równania Riccatiego. Modyfikacja uwzględnia kompensację zachowań dynamicznych o charakterze nieciągłym spowodowanych skokową zmianą parametrów c_{23} i k_{23} , uwzględniających różne własności organów wewnętrznych poddanych ścisnaniu lub rozciąganiu.

Szczególne przypadki opisywanej w dalszej części strategii sterowania rozpatrzono w pracach [?, ?, ?, ?]. Reprezentacja modelowanego układu dynamicznego w przestrzeni zmiennych stanu przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\bar{k}_{23}}{\bar{c}_{23}} & 0 & \frac{-\bar{k}_{23}}{\bar{c}_{23}} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_{12}}{m_1} & \frac{k_{12}}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{12}}{m_2} & \frac{-a_{62}}{m_2} & \frac{k_{23}}{m_2} & \frac{\bar{k}_{23}}{m_2} & 0 & \frac{-c_{23}}{m_2} & \frac{c_{23}}{m_2} \\ 0 & \frac{-a_{72}}{m_3} & \frac{-a_{73}}{m_3} & \frac{-k_{23}}{m_3} & 0 & \frac{c_{23}}{m_3} & \frac{-a_{77}}{m_3} \end{bmatrix} \bar{x} + \\ & \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m_3} \end{bmatrix}^T \bar{u}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \mathbf{C}\bar{x} + \mathbf{D}\bar{u} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{x}(t_0) = [0, 0, 0, 0, x_5(0) \neq 0, 0], \quad (8)$$

gdzie: $\bar{x} = [x_1 \dots x_7]^T$ jest wektorem stanu, $\bar{u} = u$ jest wektorem wejścia sterującego, macierze reprezentacji to: \mathbf{A} - macierz stanu układu, \mathbf{B} - macierz sygnałów sterujących (wejściowych), \mathbf{C} - macierz sygnałów wyjściowych, \mathbf{D} - macierz transmisyjna, $a_{62} = k_{12} + a_{72}$, $a_{72} = k_{23} + \bar{k}_{23}$, $a_{73} = k_{23} + k_s$, $a_{77} = c_{23} + c_s$ są wartościami stałymi. Niezerowa prędkość początkowa $x_5(0)$ impaktora (masy uderzającej związanej sprężystością k_{12} z modelem dynamicznym) stanowi wymuszenie zewnętrzne.

Zadanie sterowania polega na znalezieniu funkcji sterującej $u(t)$, która w skończonym czasie $t \in [t_0; t_k]$ i przy określonej postaci macierzy wagowych minimalizuje funkcję celu daną zależnością

$$J(t_0, t_k) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & q_7 & \\ & & & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \\ u \end{bmatrix} dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \left(\sum_{i=1}^{n=7} (q_i x_i^2(t)) + r u^2(t) \right) dt, \quad (9)
\end{aligned}$$

w której macierz jakości \mathbf{Q} , mająca niezerowe elementy tylko na głównej przekątnej i macierz reakcji $\mathbf{R} = r$ zredukowana do stałej wartości skalarnej są macierzami wagowymi metody optymalizacji liniowo-kwadratowej. Numeryczne obliczenie całki J można wykonać za pomocą procedury całkowania metodą trapezów. Należy zauważyć, że $\bar{x}(t)$ jest wektorem stanu w układzie sterowania, natomiast w równaniu (??) parametry k_s and c_s zastępują się przez $u(t)$. Można to przybliżyć w taki sposób, że własności sprężysto-tłumiące pomiędzy nieruchomym oparciem a tylną stroną klatki piersiowej (plecami) zastępuje się elementem aktywnym zdolnym do wygenerowania szybkiej, kontrolowanej reakcji w odpowiedzi na uderzenie sprężyste w klatkę piersiową od jej przedniej strony.

Na podstawie ogólnej teorii sterowania [?], regulator gwarantujący minimum funkcji kosztu J danej równaniem (??) jest dany wzorem

$$u(t) = -r\mathbf{B}^T\mathbf{K}_x\bar{x}_f(t). \quad (10)$$

Równanie (??) zawiera nieznaną symbol \mathbf{K}_x oznaczający macierz Riccatego o wymiarze (7×7) . Macierz \mathbf{K}_x jest symetryczna względem głównej przekątnej, dlatego uzyskuje się 28 nieznaną elementów tej macierzy, tj. $\xi_{21} = \xi_{12}$, $\xi_{31} = \xi_{13}$, itd. Można zauważyć, że poszukiwana siła sterująca u jest proporcjonalna do rozwiązania \bar{x}_f układu swobodnego. Estymację elementów macierzy \mathbf{K}_x , a tym samym estymację siły sterującej u wyznacza się stosując zbieżną procedurę numerycznego całkowania 28 równań różniczkowych pierwszego rzędu zapisanych poniżej w postaci macierzowej

$$\left(\dot{\mathbf{K}}_x + \mathbf{K}_x\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{K}_x - \mathbf{K}_x\mathbf{B}\frac{1}{r}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_x + \mathbf{Q} \right) \bar{x}_f(t) = 0. \quad (11)$$

Rozwinięcie postaci macierzowej (??) prowadzi do otrzymania układu 28 równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu jak następuje

$$\dot{\xi}_{11} = (2k_{12}(\xi_{15}e_7 - \xi_{16}e_6) + \xi_{17}^2e_1)/e_5 - q_1,$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{12} = & (c'_{23}k_{12}(\xi_{25}e_7 - \xi_{26}e_6) + \xi_{27}\xi_{17}e_9 - e_4(\xi_{14}e_{10} + \xi_{15}c'_{23}e_8))/(c'_{23}e_5) \\ & - (\xi_{16}e_{11}e_{14} + \xi_{17}e_9e_{13})/(c'_{23}e_5),\end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_{13} = (k_{12}(\xi_{35}e_7 - \xi_{36}e_6) + \xi_{37}\xi_{17}e_1 - m_1m_3r(\xi_{16}k_{23}(t)m_3 - \xi_{17}m_2e_{15}))/e_5,$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{14} = & \xi_{45}k_{12}e_7m_1(\xi_{46}k_{12}e_3 + \xi_{47}\xi_{17}m_2)/e_5 \\ & - (m_1k'_{23}e_4(\xi_{14}e_2 + c'_{23}(\xi_{16}m_3 - \xi_{17}m_2)))/(c'_{23}e_5),\end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_{15} = (\xi_{55}k_{12}e_7 - \xi_{56}k_{12}e_6 + \xi_{57}\xi_{17}e_1)/e_5 - \xi_{11},$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{16} = & (\xi_{56}k_{12}e_7 - m_1(\xi_{66}k_{12}e_3 + \xi_{67}\xi_{17}m_2))/e_5 - \xi_{16}c_{23}(t)e_4m_1m_3/e_5 \\ & - \xi_{17}c_{23}(t)e_4m_1m_2/e_5 - \xi_{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{17} = & (\xi_{57}k_{12}e_7 - m_1(\xi_{67}k_{12}e_3 + \xi_{77}\xi_{17}m_2))/e_5 \\ & + m_1e_4(\xi_{14}e_2 + \xi_{16}c_{23}(t)m_3 - \xi_{17}m_2e_{12})/e_5 - \xi_{13},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{22} = & -(2\xi_{25}k_{12}e_7 - m_1(2\xi_{26}e_3e_{14} + m_2\xi_{27}^2 - 2\xi_{27}e_4e_{13}))/e_5 \\ & - 2m_1\xi_{24}k'_{23}e_3/(c'_{23}e_5) - q_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{23} = & \xi_{26}k_{23}(t)e_6/e_5 + (\xi_{27}e_9(\xi_{37} - e_4e_{15}) + e_4(\xi_{34}e_{10} + \xi_{35}c'_{23}e_8))/(c'_{23}e_5) \\ & - e_4(\xi_{36}e_{11}e_{14} - \xi_{37}e_9e_{13})/(c'_{23}e_5),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{24} = & -(\xi_{26}c'_{23}k'_{23}e_6 - \xi_{27}e_9(\xi_{47} + k'_{23}e_4) + e_4(\xi_{44}e_{10} + \xi_{45}c'_{23}e_8))/(c'_{23}e_5) \\ & - m_1e_4(\xi_{46}m_3e_{14} - \xi_{47}m_2e_{13})/e_5 + \xi_{24}k'_{23}e_2/(c'_{23}e_5),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{25} = & -(\xi_{45}e_{10} + \xi_{55}c'_{23}e_8 - \xi_{56}e_{11}e_{14} + \xi_{57}e_9e_{13})/(c'_{23}m_1m_2m_3) \\ & - \xi_{12} + \xi_{27}\xi_{57}/e_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{26} = & \xi_{26}e_6c_{23}(t)/e_5 + (\xi_{27}e_9(\xi_{67} - c_{23}(t)e_4) - e_4\xi_{46}e_{10})/(c'_{23}e_5) \\ & - e_4(\xi_{56}e_8 - m_1(\xi_{66}m_3e_{14} - \xi_{67}m_2e_{13} - \xi_{22}e_2))/e_5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{27} = & -\xi_{26}e_6c_{23}(t)/e_5 - (\xi_{27}e_9(\xi_{77} + e_4e_{12}) + e_4\xi_{47}e_{10})/(c'_{23}e_5) \\ & + e_4(\xi_{57}e_8 - m_1(\xi_{67}m_3e_{14} - \xi_{77}m_2e_{13} - e_2(\xi_{23} + \xi_{24}))) / e_5,\end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_{33} = - (2\xi_{36}k_{23}(t)e_3 - \xi_{37}m_2(\xi_{37} + 2e_4e_{15}))/e_7 - q_2,$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{34} = & \xi_{34}k'_{23}/c'_{23} - (\xi_{36}k'_{23}e_3 - \xi_{37}m_2(\xi_{47} + k'_{23}e_4) + e_4\xi_{46}k_{23}(t)m_3)/e_7 \\ & - e_4\xi_{47}m_2e_{15}/e_7,\end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_{35} = \xi_{37}\xi_{57}/e_3 - (\xi_{56}k_{23}(t)m_3 - \xi_{57}m_2e_{15})/e_2 - \xi_{13},$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{36} = & (\xi_{36}c_{23}(t)e_3 + \xi_{37}m_2(\xi_{67} - c_{23}(t)e_4)/e_7 - e_4\xi_{66}k_{23}(t)m_3/e_7 \\ & - e_4m_2(\xi_{67}e_{15} - \xi_{23}m_3)/e_7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{37} = & -\xi_{33} - \xi_{34} - (\xi_{36}c_{23}(t)e_3 - \xi_{37}m_2(\xi_{77} + e_4e_{12}))/e_7 \\ & - e_4(\xi_{67}k_{23}(t)m_3 - \xi_{77}m_2e_{15})/e_7,\end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_{44} = (2\xi_{44}k'_{23}e_7 - c'_{23}(2\xi_{46}k'_{23}e_3 - \xi_{47}m_2(\xi_{47} + 2k'_{23}e_4)))/(c'_{23}e_7) - q_3,$$

$$\dot{\xi}_{45} = \xi_{45}k'_{23}/c'_{23} + \xi_{47}\xi_{57}m_2/e_7 - e_4(\xi_{56}k'_{23}m_3 - m_2(\xi_{57}k'_{23} - \xi_{14}m_3))/e_7,$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{46} = & \xi_{46}e_3c_{23}(t)/e_7 + k'_{23}m_2/(c'_{23}e_7) + \xi_{47}m_2(\xi_{67} - c_{23}(t)e_4)/e_7 \\ & - e_4(\xi_{66}k'_{23}m_3 - m_2(\xi_{67}k'_{23} - \xi_{24}m_3))/e_7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{47} = & -\xi_{34} - \xi_{44} - (\xi_{46}c_{23}(t)e_3 + \xi_{47}m_2(\xi_{77} + e_4e_{12}))/e_7 \\ & + e_4\xi_{47}m_2k'_{23}m_3/(c'_{23}e_7) - k'_{23}e_4(\xi_{67}m_3 - \xi_{77}m_2)/e_7,\end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_{55} = \xi_{57}^2/e_3 - 2\xi_{15} - q_4,$$

$$\dot{\xi}_{56} = -\xi_{25} - (\xi_{56}c_{23}(t)e_3 + m_2(\xi_{57}(\xi_{67} - c_{23}(t)e_4) - \xi_{16}e_3))/e_7,$$

$$\dot{\xi}_{57} = -\xi_{35} - \xi_{45} - (\xi_{56}c_{23}(t)e_3 - m_2(\xi_{57}(\xi_{77} + e_4e_{12}) - \xi_{17}e_3))/e_7,$$

$$\dot{\xi}_{66} = -2\xi_{26} + (2\xi_{66}c_{23}(t)e_3 + \xi_{67}m_2(\xi_{67} - 2c_{23}(t)e_4))/e_7 - q_5,$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{67} = & -\xi_{27} - \xi_{36} - \xi_{46} - \xi_{66}c_{23}(t)e_3/e_7 \\ & + (\xi_{67}(\xi_{77}m_2 + e_4(m_2(c_{23}(t) + c_s) + m_3)) - \xi_{77}c_{23}(t)e_2r)/e_7, \end{aligned}$$

$$\dot{\xi}_{77} = -2(\xi_{37} + \xi_{47}) - (2\xi_{67}c_{23}(t)e_3 - \xi_{77}m_2(\xi_{77} + 2e_4e_{12}))/e_7 - q_6, \quad (12)$$

gdzie: $e_1 = m_1m_2$, $e_2 = m_2m_3$, $e_3 = m_3^2r$, $e_4 = m_3r$, $e_5 = e_1m_3^2r$, $e_6 = m_1m_3^2r$, $e_7 = m_2m_3^2r$, $e_8 = k_{12}e_2$, $e_9 = c'_{23}e_1$, $e_{10} = k'_{23}e_1m_3$, $e_{11} = c'_{23}m_1m_3$, $e_{12} = c_{23}(t) + c_s$, $e_{13} = k_{23}(t) + k'_{23}$, $e_{14} = k_{12} + e_{13}$, $e_{15} = k_{23}(t) + k_s$. Rozwiązując ten układ przy zerowych warunkach początkowych oblicza się (w czasie pozwalającym na ustalenie wartości granicznych) wszystkie współczynniki ξ_{ij} ($i, j = 1 \dots 7$) macierzy \mathbf{K}_x .

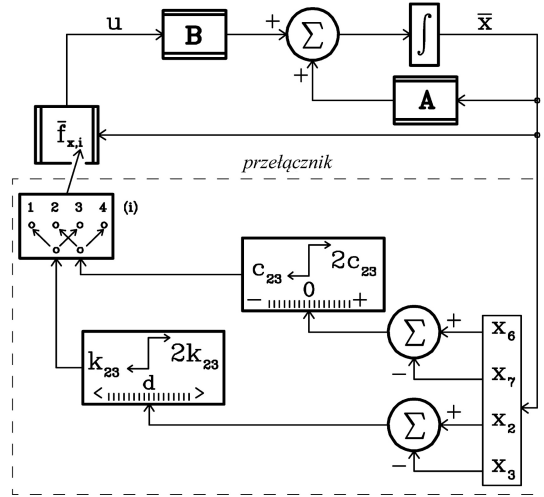
W kolejnym kroku równanie (??) można wykorzystać do obliczenia sygnału sterującego

$$u(t) = \bar{f}_x \cdot \bar{x}_f(t) = \frac{\bar{\xi}_7}{rm_3} \cdot \bar{x}_f(t) = \frac{1}{rm_3} \sum_{i=1}^7 \xi_{i,7} x_{f,i}, \quad (13)$$

gdzie $\bar{f}_x = -r\mathbf{B}^T\mathbf{K}_x$ jest wzmocnieniem proporcjonalnym ujemnej pętli sprzężenia zwrotnego. Wprowadzona tutaj modyfikacja dotycząca wyżej opisanej metody opiera się na następującym spostrzeżeniu. Z uwagi na reologiczny charakter połączeń występujących pomiędzy masami badanego układu dynamicznego, wartości wektora wzmocnień \bar{f}_x powinny przełączać się pomiędzy czterema zbiorami w sposób przedstawiony na schemacie ??.

Schemat blokowy przyjętego układu sterowania ze wzmocnieniem proporcjonalnym od pełnego wektora stanu pokazano na rysunku ??. Obliczenie wzmocnienia proporcjonalnego $\bar{f}_{x,i} \cdot \bar{x}$ jest poprzedzone wyborem odpowiedniej składowej i wektora $\bar{f}_{x,i}$. Z kolei ten wybór jest uwarunkowany aktualną różnicą położeń x_r i znakiem prędkości względnej v_r . Z powodu dwóch dwu-stanowych bloków przełączających są możliwe 4 kombinacje parametrów opisujących własności reologiczne badanego układu biomechanicznego, tj.: $[k_{23}, c_{23}]$, $[k_{23}, 2c_{23}]$, $[2k_{23}, c_{23}]$ i $[2k_{23}, 2c_{23}]$.

Przyjęte w następnym punkcie parametry układu i prędkość początkowa impaktora powodują, że zawsze w trakcie symulacji $x_r > d$. Dlatego równanie macierzowe Riccatiego związane ze sterowanym układem dynamicznym jest rozwiązywane tylko 2 razy (w tym przypadku, pomija się ostatnie



Rysunek 2: Schemat blokowy standardowej metody optymalizacji liniowo-kwadratowej odpowiedzi ciągłych układów sterowania z dodatkowym układem przełączającym i -ty wektor wzmocnienia \bar{f}_x umieszczony na linii sprzężenia zwrotnego.

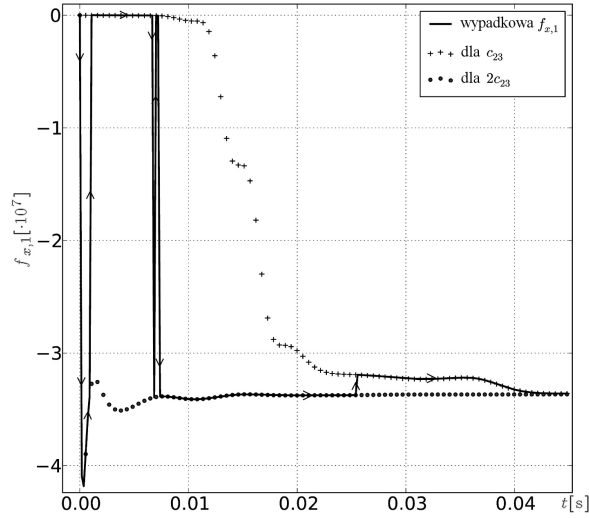
dwie z czterech kombinacji przełączeń). Zasada przełączeń przebiega według następującego schematu. Jeżeli w pewnym kroku podczas całkowania numerycznego równań różniczkowych układu dynamicznego z dodatkowym sterowaniem u wartość prędkości względnej v_r zmienia znak, to pierwszy składnik wektora tłumienia \bar{c} przełącza się pomiędzy wartościami c_{23} i $2c_{23}$ wprowadzając nieciągłą zmianę wzmocnienia proporcjonalnego. Poprawności przyjętej metodyki weryfikuje eksperyment numeryczny opisany w kolejnym punkcie.

3 Symulacja numeryczna

W modelu numerycznym badanego układu (swobodnego i poddanego sterowaniu) przyjęto następujący zestaw parametrów: $m_1 = 1.6$, $m_2 = 0.45$, $m_3 = 27$ [kg], $d = 3.8$ [cm], $k_{12} = 281$, $k_{23} = 26.3$, $\bar{k}_{23} = 13.2$, $k_s = 10 \cdot 10^3$ [N/m], $c_{23} = 1.23$, $\bar{c}_{23} = 0.18$, $c_s = 0.11 \cdot 10^3$ [Ns/m] i warunków początkowych: $\bar{x}_f(t_0) = [0, 0, 0, 0, 13.9, 0, 0, 0]$, $t_0 = 0$.

Pierwszy eksperyment polega na sprawdzeniu charakteru przełączeń wektora \bar{f}_x . Wykres czasowy skokowych zmian jego wartości pomiędzy wykresami uzyskanymi przy c_{23} i $2c_{23}$ pokazano na rysunku ??, który ilustruje

początkowe 250 iteracji (w czasie $t_k = 0.045$ [s]) pierwszego elementu wektora \bar{f}_x .



Rysunek 3: Wykres czasowy zmian pierwszego elementu wektora wzmocnienia. Liniami kropkowanymi zaznaczono dwa wykresy czasowe wzmocnienia $f_{x,1}$ dla dwóch wartości parametru tłumienia c_{23} and $2c_{23}$.

Jak potwierdzają obliczenia, 60-ta iteracja w tej serii (w chwili 0.0108 [s]) odpowiada minimalnej wartości J_{\min} funkcji kosztu J . W procedurze numerycznej minimalizującej funkcję celu przyjmuje się charakterystykę czasową zmian wektora wzmocnienia zaznaczoną na wykresie linią ciągłą. W tabeli ?? odpowiada to pierwszej wartości stałej wzmocnienia $\bar{f}_{x,1} = -3.40e7$. Zawiera ona składowe wektora wzmocnienia zależne od znaku prędkości względnej v_r . W kolejnej symulacji numerycznej zostanie pokazane, że optymalna wartość $\bar{f}_{x,1}$ gwarantuje przy kroku całkowania $h = 1.8e - 4$ minimum funkcji kosztu $J_{\min} = 1.39e7$ (por. z rysunkiem ??).

Ze względu na krótki czas ustalania się odpowiedzi impulsowej, prawo sterowania powinno być realizowane przez szybki mechanizm (wzбудnik) generujący siłę o charakterystyce u . Tą zależność przedstawiono na rysunku ?? wraz z odpowiadającą jej zmianą odkształcenia względnego x_c .

Wartość maksymalną 2.34 [cm] funkcji $x_c(t)$ poprzedza wzrost amplitudy siły sterującej $u(t)$, której wartość zmienia w czasie 10 [ms] pomiędzy -4 i 10 [kN]. W praktyce, ten czas mógłby być dłuższy np., ze względu na opóźnienie mechanizmu wymuszającego i masy klatki piersiowej wymuszonej siłą impulsową. Eksperyment numeryczny potwierdził, że testowana metoda

Tabela 1: Składowe wektora wzmocnienia $f_{x,i}$, przy $i = 1 \dots 7$ w iteracji $j = 60$ rozwiązania numerycznego w zamkniętym układzie sterowania.

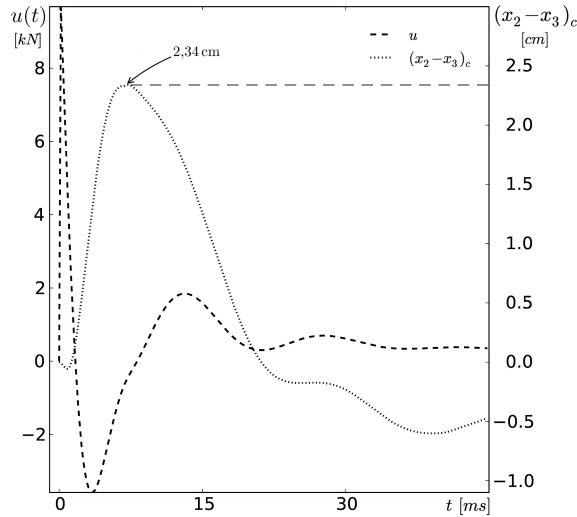
$j = 60$	$i = 1 \dots 7$
przy $c_1 = c_{23}$	$\bar{f}_{x,i} = [-3.40e7, 3.66e7, -3.89e6, 1.34e6, -2.81e3, 1.57e5, -1.53e5]$
przy $c_1 = 2c_{23}$	$\bar{f}_{x,i} = [-8.35e6, 9.30e6, 6.40e5, -3.12e5, 8.28e3, 4.40e3, -1.28e4]$

może być stosowana do wyznaczenia czasowej charakterystyki odpowiedzi elementu wykonawczego umieszczonego pomiędzy oparciem a tylną stroną klatki piersiowej.

Na rysunku ?? za pomocą punktów pokazano zbiór 246 wartości funkcji celu spośród których, jej minimalną wartość osiągnięto przy $J_{\min} = 1.39e7$. To potwierdza, że odpowiadające temu minimum wzmocnienie gwarantuje optymalną, ale nie minimalną amplitudę odpowiedzi x_r układu sterowania pokazaną na rysunku ?. Procedurę optymalizacji liniowo-kwadratowej funkcji celu należy poprzedzić doбором właściwych wartości elementów macierzy jakości Q i współczynnika reakcji r .

Zapewniając dostatecznie mały krok czasowy podczas całkowania numerycznego (ten sam przy obliczaniu rozwiązania równań różniczkowych układu sterowania i elementów macierzy Riccatiego), całkowity czas obliczeń 246 pętli symulacji rozwiązania wyniósł około 130 minut na komputerze wyposażonym w procesor AMD Phenom II X4 Quad Core 965 Black Ed. i 4GB pamięci RAM DDR3. W wyniku sterowania badanego układu dynamicznego prowadzonego przy zachowaniu minimalnej wartości wskaźnika wydajności J_{\min} uzyskano rozwiązanie pokazane na rysunku ?. Zestaw parametrów procedury optymalizacji liniowo-kwadratowej wypisany obok widocznych charakterystyk czasowych wyznaczono na podstawie obliczeń najmniejszej amplitudy sygnału x_c .

Porównując wykresy widoczne na rysunku ?? można założyć, że algorytm regulacji wciąż ma pewien zapas na optymalizację funkcji kosztu, co przy zmniejszeniu współczynnika r umożliwiłoby uzyskanie mniejszej wartości szczytowej sygnału x_c . W efekcie uzyskuje się mniejszą różnicę odległości (mniejsze zbliżenie) pomiędzy przednią i tylną ścianą klatki piersiowej, ale wzmocnieniu ulega drugi pik mający porównywalną amplitudę równą w przybliżeniu 1.5 [cm]. W tym przypadku układ sterowany nie odpowiada w sposób optymalny, ale obserwuje się zmniejszenie zbliżenia do wartości 1.75

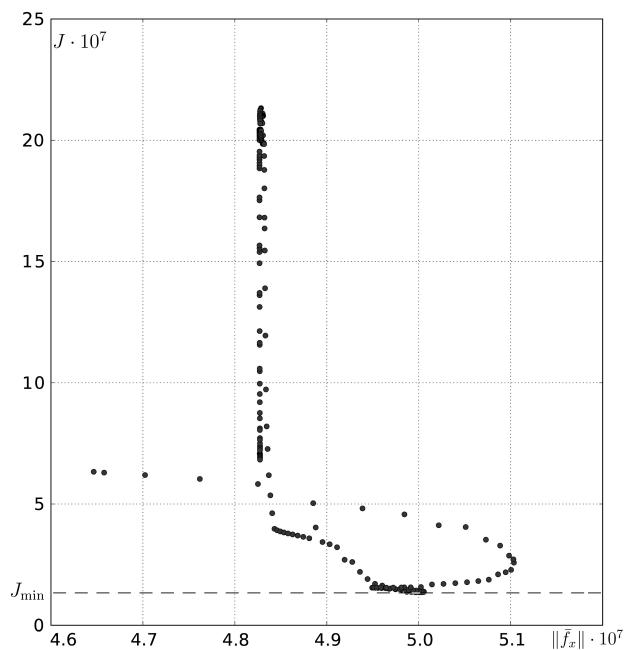


Rysunek 4: Charakterystyka czasowa sygnału sterującego $u(t)$ i odpowiadające mu odkształcenie względne $x_c = (x_2 - x_3)_c$ klatki piersiowej. Końcowy czas obserwacji został ustawiony na $t_k = 40$ [ms].

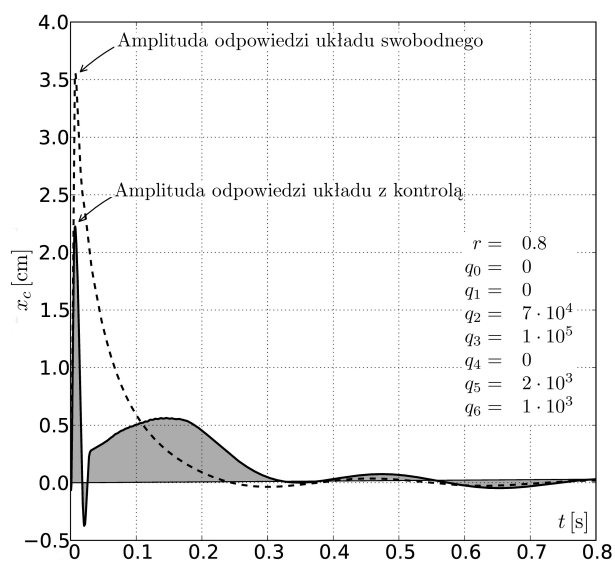
[cm] stanowiącej o blisko 50% redukcji w porównaniu do odpowiedzi układu swobodnego.

Przedstawiona metoda budowy układu sterowania może być stosowana do optymalizacji odpowiedzi układów dynamicznych opisanych parametrami zmiennymi w czasie. Wymagane jest jednak uwzględnienie dodatkowych procedur odpowiedzialnych za przełączanie pętli sprzężenia zwrotnego pomiędzy parametrami odpowiednimi dla aktualnego stanu dynamicznego.

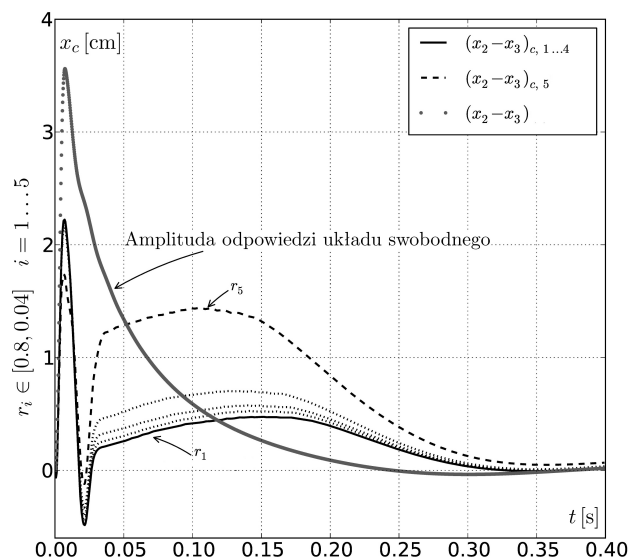
Podano rozwiązanie numeryczne liniowego, nieciągłego układu biomechanicznego, a także opisano i zastosowano ciekawą strategię sterowania w tym układzie. W zależności od stawianych wymagań jest możliwa optymalizacja odpowiedzi obiektu regulacji lub znaczące zmniejszenie jej amplitudy. Myśląc o praktycznej implementacji opisanego sterowania układu dynamicznego wymuszaniem uderzeniem sprężystym konieczne byłoby zaprojektowanie mechanizmu (wzбудnika charakteryzującego się szybką reakcją) realizującego np. przesunięcie podparcia od tylnej strony klatki piersiowej.



Rysunek 5: Zależność wskaźnika wydajności J (przy $t_k = 0.3$) od i -tej iteracji ($i \in [5 : 250]$) długości wektora wzmocnienia $\|f_x\|[i] = \sqrt{\sum_{k=1}^7 f_{x,(k)}^2[i]}$.



Rysunek 6: Względne przemieszczenie $x_c = x_2 - x_3$ mas m_2 i m_3 układu swobodnego (linia kreskowana) i poddanego sterowaniu (linia ciągła) z optymalną charakterystyką wektora wzmocnienia proporcjonalnego.



Rysunek 7: Niewłaściwy dobór współczynnika reakcji r pokazuje, że najbardziej optymalną odpowiedź badanego układu biomechanicznego z układem regulacji aktywnej uzyskano przy $r = 0.8$.