

II. Filtracja dynamiczna Kalmana: podstawowa metoda estymacji statycznie optymalnej

Analiza i optymalizacja układów
mechatronicznych i mikrosystemów MT WEEiA (II)

P. Olejnik

Katedra Automatyki, Biomechaniki i Mechatroniki
Wydział Mechaniczny Politechniki Łódzkiej

2024 r.

Zakres prezentowanych zagadnień

1. Obszar zastosowań
2. Własności filtru Kalmana
3. Model matematyczny procesu
4. Szumy procesu i pomiaru
 - 4.1. prawdopodobieństwo wartości cechy
 - 4.2. prawdopodobieństwo wartości stanu
 - 4.3. błędy szacowania stanu
 - 4.4. błędy szacowania estymacji
5. Minimalizacja wariancji błędu estymacji a posteriori
6. Algorytm dyskretnego filtru Kalmana
7. Przykład zastosowania

1. Obszar zastosowań

Filtrację dynamiczną opracował Rudolph E. Kalman w roku 1960. W pracy [Kalman, 1960] autor opisał metodę filtracji dynamicznej, stanowiącej najczęściej stosowaną metodę estymacji statycznie optymalnej. Metoda pozwala wyznaczyć nieznanne zmienne stanu na podstawie dostępnych pomiarów i modelu matematycznego.

Zastosowanie algorytmu filtracji dynamicznej Kalmana (tzw. filtru Kalmana) jest szerokie [Welch and Bishop, 2001]. Spotykane jest m.in. w:

- ◇ inżynierii układów pomiarowych (układów percepcji otoczenia) będących podsystemami samolotów, robotów, obiektów namierzających
- ◇ technikach komputerowych do przetwarzania obrazów,
- ◇ ekonomii do przewidywania zmian wskaźników gospodarczych.

Często, z uwagi na zakłócenie lub stochastyczny charakter próbek pomiarowych stosowanie tego algorytmu umożliwia ocenę aktualnego stanu obiektu dynamicznego.

2. Własności filtru Kalmana

- a. Nazywany jest filtrem, ponieważ jest optymalnym estymatorem stanu. Wiele pomiarów pochodzących z otoczenia jest obarczone szumem (rozrzutem wokół wartości prawdziwej z pewnym prawdopodobieństwem). Są one wykorzystywane do obliczenia spodziewanego – optymalnego stanu układu dynamicznego w danej chwili czasowej.
- b. Jest optymalnym estymatorem, ponieważ przy określonych założeniach spełnia kryterium minimalizacji błędu średniokwadratowego estymowanych parametrów.
- c. Wykorzystuje wszystkie dostępne wartości pomiarowe bez względu na ich dokładność. Na tej podstawie wykonuje najlepszą estymację stanu dynamicznego.

2. Własności filtru Kalmana

- d. Jest algorytmem rekursywnym, nie wykonuje operacji na wszystkich pomiarach w każdym kroku optymalizacji. Wykorzystując wartości obliczone w poprzednim kroku przetwarza je w sposób sukcesywny.
- e. Za pomocą znanych (mierzalnych) sygnałów wejściowych i wyjściowych układu liniowego oblicza optymalne wartości niemierzalne (w teorii sterowania nieobserwowalne zmienne stanu).

3. Model matematyczny procesu

Problem obserwatora stanu należy zagadnień często podejmowanych w teorii układów liniowych. Układ traktuje się jak czarną skrzynkę (nieznany jest dokładny opis matematyczny), gdzie znane (mierzone) są tylko sygnały wyjściowe na podstawie których estymuje się stan kontrolowanego obiektu. Jeśli obiekt jest obserwowalny, to stosowanie filtru Kalmana jest uzasadnione, ponieważ istnieje wzajemna korelacja pomiędzy stanem wewnętrznym obiektu regulacji i jego sygnałem mierzonym na wyjściu.

3. Model matematyczny procesu

Opis układu dynamicznego (procesu) dany jest następującym modelem matematycznym

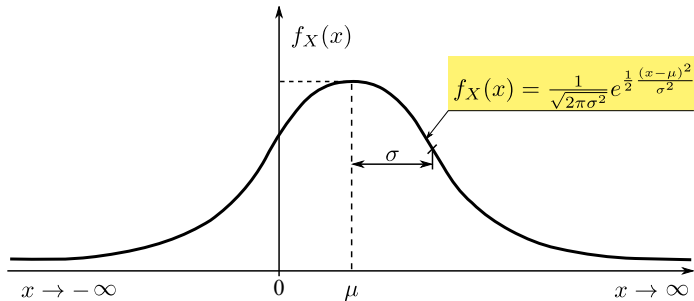
$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1}, \quad (3.1)$$

$$z_k = Hx_k + v_k. \quad (3.2)$$

Równanie różnicowe stanu (3.1) opisuje model procesu, będący sumą części deterministycznej $Ax_{k-1} + Bu_k$ i losowej w_{k-1} . Stan aktualny x_k w k -tym kroku jest związany z poprzednią iteracją zmiennej x , aktualną wartością sterującą u i zaburzeniem losowym w poprzedniego stanu procesu w kroku $k - 1$. Macierz A stanu wewnętrznego $x \in \mathbb{R}^n$ modelowanego procesu ma wymiar $n \times n$ i może zależeć od czasu. B jest macierzą $n \times l$ wejść sterujących $u \in \mathbb{R}^l$, w jest szumem procesu. W równaniu różnicowym pomiaru (3.2), H jest macierzą wyjścia ($m \times n$), v jest zakłóceniem sygnału z zmierzonego na wyjściu tego procesu. Macierz H może zależeć od czasu (w każdym kroku czasowym lub w każdym pomiarze).

4. Szumy procesu i pomiaru

Szumy procesu i pomiaru są określone funkcją prawdopodobieństwa o rozkładzie normalnym, widocznym na rysunku 8.



Rysunek: Funkcja gęstości prawdopodobieństwa wg rozkładu Gaussa

1 Szumy procesu i pomiaru – prawdopodobieństwo wartości cechy

$$p(w) \sim N(0, Q), \quad (4.1)$$

$$p(v) \sim N(0, R). \quad (4.2)$$

Zapis dany równaniami (4.1)-(4.2) oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia zmiennej w jest dane rozkładem normalnym, 0 jest wartością średnią rozkładu ($\mu = 0$), Q i R oznaczają macierze wariancji σ^2 , odpowiednio szumów procesu i pomiaru. Wariancja z definicji, jest to średnia arytmetyczna kwadratów różnic poszczególnych wartości cechy od wartości oczekiwanej.

2 Szumy procesu i pomiaru – prawdopodobieństwo wartości stanu

Prawdopodobieństwo warunkowe tego, że proces znajduje się aktualnie w stanie x_k , jeżeli wcześniej znajdował się w stanie x_{k-1} jest dane rozkładem normalnym, jak następuje

$$p(x_k|x_{k-1}) \sim N(Ax_{k-1} + Bu_k, Q). \quad (4.3)$$

Prawdopodobieństwo warunkowe tego, że pomiar (sygnał wyjściowy zmierzony w k -tym kroku) przyjmuje wartość z_k , jeżeli aktualnie proces jest w stanie x_k wyraża się rozkładem normalnym, jak następuje

$$p(z_k|x_k) \sim N(Hx_k, R). \quad (4.4)$$

3 Szumy procesu i pomiaru – błędy szacowania stanu

Następnie definiuje się błędy szacowania stanu procesu. W praktyce, rzeczywiste wartości stanu x_k nie są znane.

- ◇ Przyjmuje się a priori, że błąd szacowania (tzw. błąd a priori e_k^-) wynosi

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^-, \quad (4.5)$$

gdzie $\hat{x}_k^- \in \mathbb{R}^n$ jest estymacją a priori stanu w kroku k , dającą informację o procesie przed pojawieniem się stanu w tym kroku.

- ◇ Przyjmuje się a posteriori, że błąd szacowania (tzw. błąd a posteriori e_k) wynosi

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k, \quad (4.6)$$

gdzie $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ jest estymacją a posteriori stanu w kroku k , uzyskanego już na podstawie pomiaru z_k .

4 Szumy procesu i pomiaru – błędy szacowania estymacji

Oczekiwaną wartość wariancji błędu estymacji a priori określa wzór

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}], \quad (4.7)$$

a oczekiwaną wartość wariancji błędu estymacji a posteriori wzór

$$P_k = E[e_k e_k^T]. \quad (4.8)$$

Wartość oczekiwana dyskretnej zmiennej losowej X : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$, gdzie x_i to kolejne próby (zdarzenia) zmiennej losowej X a p_i to odpowiadający im dyskretny zbiór wartości prawdopodobieństwa każdego zdarzenia.

Wartość oczekiwaną ciągłej zmiennej losowej X wyraża wzór:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx, \quad (4.9)$$

gdzie $f_X(x)$ jest funkcją rozkładu gęstości prawdopodobieństwa (np. rozkładem normalnym).

4 Szumy procesu i pomiaru – błędy szacowania estymacji

Przy wyprowadzaniu równań filtru Kalmana wychodzi się od znalezienia równania obliczającego estymację a posteriori stanu \hat{x}_k . Jest to liniowa kombinacja pewnej estymacji a priori \hat{x}_k^- i ważonej różnicy pomiędzy aktualnym pomiarem z_k a oczekiwanym pomiarem $H\hat{x}_k^-$ zgodnie z równaniem

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-). \quad (4.10)$$

Różnica $(z_k - H\hat{x}_k^-)$ w równaniu (4.10) jest nazywana innowacją pomiaru lub resztą. Reszta oznacza rozbieżność pomiędzy oczekiwanym pomiarem $H\hat{x}_k^-$ a aktualnym pomiarem z_k .

Macierz K o wymiarze $n \times m$ jest dobranym wzmocnieniem, nazywanym również czynnikiem mieszania. Minimalizuje wariancję błędu estymacji a posteriori. Minimalizację można przeprowadzić w następujący sposób.

5. Minimalizacja wariancji błędu estymacji a posteriori

Podstawia się równanie (4.10) do równania (4.6), obliczając e_k , które z kolei stosuje w równaniu (4.8) do obliczenia macierzy P_k . Obliczając pochodną śladu tej macierzy ze względu na K , a następnie przyrównując ją do zera oblicza poszukiwaną wartość wzmocnienia filtra Kalmana. Kilka minimalizacji przeprowadzono w pracach [Maybeck, 1979, Jacobs, 1993]. Jedną z nich, minimalizującą równanie (4.8) jest postaci

$$K_k = \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R}. \quad (5.1)$$

5. Minimalizacja wariancji błędu estymacji a posteriori

Jeśli wariancja błędu pomiaru zbiega do zera, to reszta wzmocnienia K ma coraz większe znaczenie. Oznacza to, że aktualny pomiar z_k jest dokładniejszy (coraz bardziej prawdopodobny), a oczekiwany pomiar $H\hat{x}_k^-$ jest szacowany mniej dokładnie:

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H^{-1}. \quad (5.2)$$

Jeśli wariancja błędu estymacji a priori P_k^- zbiega do zera, to reszta wzmocnienia K ma coraz mniejsze znaczenie. Oznacza to, że aktualny pomiar z_k jest bardziej niedokładny (coraz mniej prawdopodobny), a oczekiwany pomiar $H\hat{x}_k^-$ jest szacowany bardziej dokładnie:

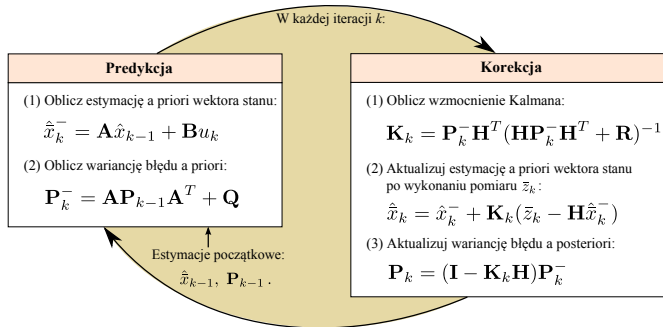
$$\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0. \quad (5.3)$$

6. Algorytm dyskretnego filtru Kalmana

Filtr Kalmana estymuje proces wykorzystując pewną postać układu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym: filtr estymuje stan procesu w pewnej chwili czasowej uzyskując informację zwrotną w postaci pomiarów obarczonych szumem. W tej sytuacji, równania opisujące filtr Kalmana tworzą dwie grupy: równania aktualizacji czasu i równania aktualizacji pomiaru. Równania aktualizacji czasu (tzw. równania predyktora) są odpowiedzialne za rzutowanie w przód aktualnych estymacji stanu i błędu wariancji w celu uzyskania estymacji a priori na potrzeby obliczeń wykonywanych w kolejnym kroku. Równania aktualizacji pomiaru (tzw. równania korektora) są odpowiedzialne za sprzężenie zwrotne, tzn. za wprowadzenie nowego pomiaru do estymacji a priori w celu uzyskania poprawionej estymacji a posteriori.

6. Algorytm dyskretnego filtru Kalmana

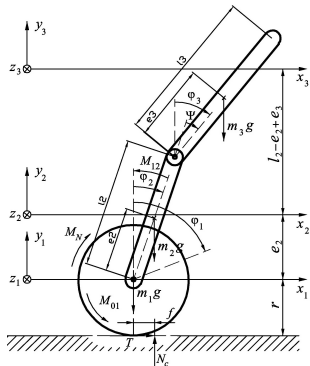
W efekcie powstaje algorytm predyktor-korektor do rozwiązywania problemów numerycznych pokazany na rysunku 6.1



Rysunek: 6.1. Algorytm filtru Kalmana.

7. Pierwszy przykład zastosowania

Sterowaniu podlega model podwójnego wahadła odwróconego z tarciem tocznym pokazany na rysunku 7.1 [Olejnik et al., 2013].

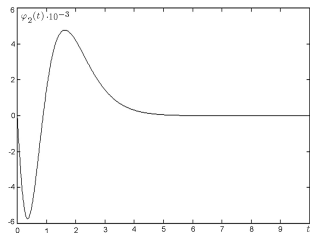


$$G(s) = \frac{2,328e^{-10}s^2 - 4,237e^4s + 28,37}{s^3 + 1,495e^6s^2 - 1,626e^5s - 9,181e^6}$$

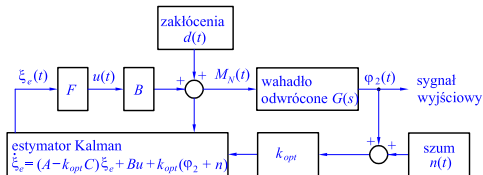
Rysunek: 7.1. Obiekt regulacji.

7. Pierwszy przykład

Wykonując niżej dane wywołania funkcji Matlaba wysterowano położenie górnego wahadła do pozycji pionowej [Olejnik et al., 2013]. Efekt jest widoczny na rysunku 7.2



Rysunek: 7.2. Odpowiedź układu obiektu regulacji umieszczonego w układzie sterowania z estymatorem Kalmana.



```
[A,B,C,D] = linmod('simulink_monocyk');  
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D);  
G = tf(num,den);  
monocyk_ss = ss(G);  
k_opt = lqry(monocyk_ss,10,1);  
[A,B,C,D] = ssdata(monocyk_ss);  
monocyk_separacja_ss = ss(A,[B,B],C,[D,D]);  
k_Kalman = kalman(monocyk_separacja_ss,1,0.01);  
F = lqgreg(k_Kalman,k_opt);  
monocyk_feedback = feedback(monocyk_ss,F,1);  
t = 0:0.01:10;  
[phi_2_kontrola,_t] = step(monocyk_feedback,t);  
plot(t^T,phi_2_kontrola);
```

7. Drugi przykład na podstawie opracowania do laboratorium

Dany jest obiekt sterowania o transmitancji Laplace'a:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (7.1)$$

Napisz procedurę numeryczną w Scilabie, realizującą algorytm dyskretnego filtru Kalmana, obliczającego estymację $\hat{\bar{x}}(t)$ stanu $\bar{x}(t)$ obiektu sterowania danego transmitancją (7.1). Stan wewnętrzny $\bar{x}(t)$ jest poddany zakłóceniu $\bar{w}(t)$, natomiast pomiar $\bar{y}(t)$ na jego wyjściu, zakłóceniu $\bar{z}(t)$. Wariancje sygnału $\bar{w}(t)$ i $\bar{z}(t)$ są dane i wynoszą odpowiednio

$$\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2]^T = [1e - 5, 2e - 5]^T \text{ oraz } \mathbf{R} = [R_1, R_2]^T = [1e - 2, 0]^T.$$

Wnioski

Filtr Kalmana jako **optymalny estymator stanu** umożliwia sterowanie obiektami regulacji. Pomiar zmiennych stanu w tych układach charakteryzuje się zazwyczaj rozrzutem wokół wartości prawdziwej z pewnym prawdopodobieństwem. Z taką sytuacją mamy do czynienia zawsze w układach rzeczywistych, dlatego schemat regulacji z jego wykorzystaniem nadaje się wyjątkowo dobrze do sterowania rzeczywistymi układami dynamicznymi.

Innym czynnikiem wpływającym na jego wykorzystanie jest to, że nie jest wymagana pełna informacja o jego stanie w przestrzeni. Z tego względu sprawdza się w układach, których nie wszystkie zmienne stanu są obserwowalne.

Wnioski

Filtr Kalmana jako **optymalny estymator stanu** umożliwia sterowanie obiektami regulacji. Pomiar zmiennych stanu w tych układach charakteryzuje się zazwyczaj rozrzutem wokół wartości prawdziwej z pewnym prawdopodobieństwem. Z taką sytuacją mamy do czynienia zawsze w układach rzeczywistych, dlatego schemat regulacji z jego wykorzystaniem nadaje się wyjątkowo dobrze do sterowania rzeczywistymi układami dynamicznymi.

Innym czynnikiem wpływającym na jego wykorzystanie jest to, że nie jest wymagana pełna informacja o jego stanie w przestrzeni. Z tego względu sprawdza się w układach, których nie wszystkie zmienne stanu są obserwowalne.

Literatura

Jacobs, O. (1993).

Introduction to Control Theory.

Oxford, 2 edition.

Kalman, R. (1960).

A new approach to linear filtering and prediction problems.

Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering, 82:35–45.

Maybeck, P. S. (1979).

Stochastic Models, Estimation, and Control, volume 1.

Academic Press, Inc.

Olejniki, P., Awrejcewicz, J., and Nielaczny, M. (2013).

Solution of the Kalman filtering problem in control and modeling of a double inverted pendulum with rolling friction.

Pomiary Automatyka Robotyka, 1:63–70.

Literatura (cont.)

Welch, G. and Bishop, G. (2001).

An Introduction to the Kalman Filter, volume 8.

ACM, Inc., University of North Carolina.

Dziękuję za uwagę!