

Analiza i optymalizacja układów mechatronicznych i mikrosystemów MT WEEiA (II)

P. Olejnik

25 listopada 2024

II. Filtracja dynamiczna Kalmana jako podstawowa metoda estymacji statycznie optymalnej

Filtrację dynamiczną opracował Rudolph E. Kalman w roku 1960. W pracy [2] autor opisał metodę filtracji dynamicznej, stanowiącej najczęściej stosowaną metodę estymacji statycznie optymalnej. Metoda pozwala wyznaczyć nieznanne zmienne stanu na podstawie dostępnych pomiarów i modelu matematycznego [5].

Zastosowanie algorytmu filtracji dynamicznej Kalmana (tzw. filtru Kalmana) jest szerokie. Spotykane jest w inżynierii układów pomiarowych (układów percepcji otoczenia) będących podsystemami samolotów, robotów, obiektów namierzających. Ponadto, algorytm wykorzystuje się w technikach komputerowych do przetwarzania obrazów, czy też w ekonomii do przewidywania zmian wskaźników gospodarczych. Często, z uwagi na zakłócenie lub stochastyczny charakter próbek pomiarowych stosowanie tego algorytmu umożliwia ocenę aktualnego stanu obiektu dynamicznego.

Filtr Kalmana ma następujące własności:

- a. Nazywany jest filtrem, ponieważ jest optymalnym estymatorem stanu. Wiele pomiarów pochodzących z otoczenia jest obciążone szumem (rozrzutem wokół wartości prawdziwej z pewnym prawdopodobieństwem). Są one wykorzystywane do obliczenia spodziewanego – optymalnego stanu układu dynamicznego w danej chwili czasowej.

- b. Jest optymalnym estymatorem, ponieważ przy określonych założeniach spełnia kryterium minimalizacji błędu średniokwadratowego estymowanych parametrów.
- c. Wykorzystuje wszystkie dostępne wartości pomiarowe bez względu na ich dokładność. Na tej podstawie wykonuje najlepszą estymację stanu dynamicznego.
- d. Jest algorytmem rekursywnym i nie zapamiętuje wszystkich pomiarów, jak też nie wykonuje na nich operacji w każdym kroku optymalizacji. Wykorzystując wartości obliczone w poprzednim kroku przetwarza je w sposób sukcesywny.
- e. Za pomocą znanych (mierzalnych) sygnałów wejściowych i wyjściowych układu liniowego oblicza optymalne wartości niemierzalne (nieobserwowalne zmienne stanu).

1 Model matematyczny procesu

Problem obserwatora stanu należy zagadnień często podejmowanych w teorii układów liniowych. Układ traktuje się jak czarną skrzynkę (nieznany jest dokładny opis matematyczny), gdzie znane (mierzone) są tylko sygnały wyjściowe na podstawie których estymuje się stan kontrolowanego obiektu. Jeśli obiekt jest obserwowalny, to stosowanie filtru Kalmana jest uzasadnione, ponieważ istnieje wzajemna korelacja pomiędzy stanem wewnętrznym obiektu regulacji i jego sygnałem mierzonym na wyjściu.

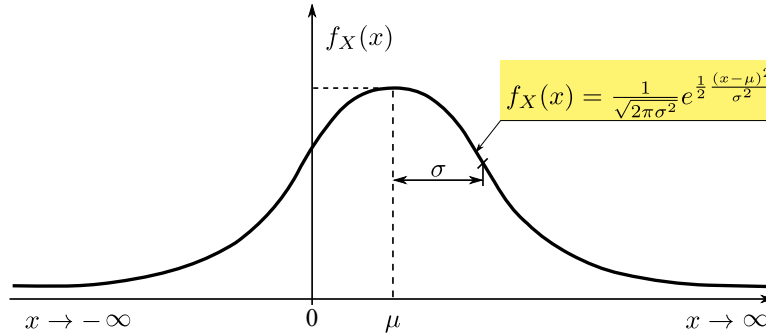
Opis układu dynamicznego (procesu) dany jest następującym modelem matematycznym [5]:

$$x_k = \mathbf{A}x_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1} + w_{k-1}, \quad (1.1)$$

$$z_k = \mathbf{H}x_k + v_k. \quad (1.2)$$

Równanie różnicowe stanu (1.1) opisuje model procesu, będący sumą części deterministycznej $\mathbf{A}x_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1}$ i losowej w_{k-1} . Stan aktualny x_k w k -tym kroku jest związany z poprzednią iteracją zmiennej x , aktualną wartością sterującą u i zaburzeniem losowym w poprzedniego stanu procesu uzyskanego w kroku $k - 1$. \mathbf{A} jest macierzą o wymiarze $n \times n$ stanu wewnętrznego $x \in \mathbb{R}^n$ modelowanego procesu, która w praktyce może zależeć od czasu. \mathbf{B} jest macierzą o wymiarze $n \times l$ wejścia sygnału sterującego

$u \in \mathbb{R}^l$, w jest szumem procesu. W równaniu różnicowym pomiaru (1.2), \mathbf{H} jest macierzą wyjścia o wymiarze $m \times n$, a v jest zakłóceniem sygnału z zmierzonego na wyjściu tego procesu.



Rysunek 1.1: Funkcja gęstości prawdopodobieństwa wg rozkładu Gaussa (x – zmienna losowa, X – ciągły proces losowy).

W praktyce, \mathbf{H} może zmieniać się w czasie (w każdym kroku czasowym lub z każdym pomiarem). Szumy procesu i pomiaru są określone funkcją prawdopodobieństwa o rozkładzie Gaussa (tzw. rozkładem normalnym, zob. rysunek 1.1):

$$p(w) \sim N(0, \mathbf{Q}), \quad p(v) \sim N(0, \mathbf{R}). \quad (1.3)$$

Zapis dany równaniami (1.3) oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia zmiennej w jest dane rozkładem normalnym, 0 jest wartością średnią tego rozkładu ($\mu = 0$), a \mathbf{Q} i \mathbf{R} oznaczają macierze wariancji σ^2 , odpowiednio szumu procesu i pomiaru. Wariancja z definicji, jest to średnia arytmetyczna kwadratów różnic poszczególnych wartości cechy od wartości oczekiwanej.

Prawdopodobieństwo warunkowe tego, że proces znajduje się aktualnie w stanie x_k , jeżeli wcześniej znajdował się w stanie x_{k-1} jest dane rozkładem normalnym, jak następuje:

$$p(x_k | x_{k-1}) \sim N(\mathbf{A}x_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1}, \mathbf{Q}). \quad (1.4)$$

Prawdopodobieństwo warunkowe tego, że pomiar (sygnał wyjściowy zmierzony w k -tym kroku) przyjmuje wartość z_k , jeżeli aktualnie proces jest w stanie x_k wyraża się rozkładem normalnym, jak następuje:

$$p(z_k | x_k) \sim N(\mathbf{H}x_k, \mathbf{R}). \quad (1.5)$$

Następnie definiuje się błędy szacowania stanu procesu. W praktyce, rzeczywiste wartości wektora stanu x_k nie są znane, a macierze \mathbf{Q} i \mathbf{R} mogą zmieniać się w każdej iteracji.

Przyjmuje się a priori (w założeniu teoretycznym, przed obliczeniem danej wartości obciążonej błędem szacowania), że błąd szacowania (tzw. błąd a priori e_k^- oparty na estymacji stanu procesu przed obserwacją, w założeniu teoretycznym) wynosi

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^-, \quad (1.6)$$

gdzie $\hat{x}_k^- \in \mathbb{R}^n$ jest estymacją a priori stanu w kroku k , dająca wiedzę o procesie przed obliczeniem wartości wektora stanu w tym kroku.

Przyjmuje się a posteriori (po rzeczywistej obserwacji), że błąd szacowania (tzw. błąd a posteriori e_k oparty na estymacji stanu procesu po wykonaniu obserwacji) wynosi

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k, \quad (1.7)$$

gdzie $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ jest estymacją a posteriori stanu w kroku k , uzyskanego już na podstawie pomiaru z_k .

Oczekiwaną wartość wariancji błędu estymacji a priori określa wzór

$$\mathbf{P}_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}], \quad (1.8)$$

a oczekiwaną wartość wariancji błędu estymacji a posteriori wzór

$$\mathbf{P}_k = E[e_k e_k^T]. \quad (1.9)$$

Przy wyprowadzaniu równań filtru Kalmana wychodzi się od znalezienia równania obliczającego estymację a posteriori stanu \hat{x}_k . Jest to liniowa kombinacja pewnej estymacji a priori \hat{x}_k^- i ważonej różnicy pomiędzy aktualnym pomiarem z_k a oczekiwanym pomiarem $\mathbf{H}\hat{x}_k^-$, zgodnie z równaniem

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \mathbf{K}(z_k - \mathbf{H}\hat{x}_k^-). \quad (1.10)$$

Różnica $(z_k - \mathbf{H}\hat{x}_k^-)$ w równaniu (1.10) jest nazywana innowacją pomiaru lub resztą. Reszta oznacza rozbieżność pomiędzy oczekiwanym pomiarem $\mathbf{H}\hat{x}_k^-$ a aktualnym (zaistniałym) pomiarem z_k .

Macierz \mathbf{K} o wymiarze $n \times m$ jest dobranym wzmocnieniem, nazywanym również czynnikiem zmieszania, który minimalizuje wariancję błędu estymacji a posteriori. Minimalizację można przeprowadzić w następujący sposób.

Podstawia się równanie (1.10) do równania (1.7), obliczając e_k , które z kolei stosuje się w równaniu (1.9) do obliczenia macierzy \mathbf{P}_k . Obliczając pochodną śladu tej macierzy ze względu na \mathbf{K} , a następnie przyrównując ją do zera oblicza poszukiwaną wartość wzmocnienia filtru Kalmana. Kilka minimalizacji przeprowadzono w pracach [3, 1]. Jedną spośród nich, która minimalizuje równanie (1.9) ma postać:

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T}{\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k}. \quad (1.11)$$

Jeśli wariancja błędu pomiaru zbiega do zera, to reszta wzmocnienia \mathbf{K} ma coraz większe znaczenie. Oznacza to, że aktualny pomiar z_k jest dokładniejszy (coraz bardziej prawdopodobny), a oczekiwany pomiar $\mathbf{H}\hat{x}_k^-$ jest szacowany mniej dokładnie:

$$\lim_{\mathbf{R}_k \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{H}^{-1}. \quad (1.12)$$

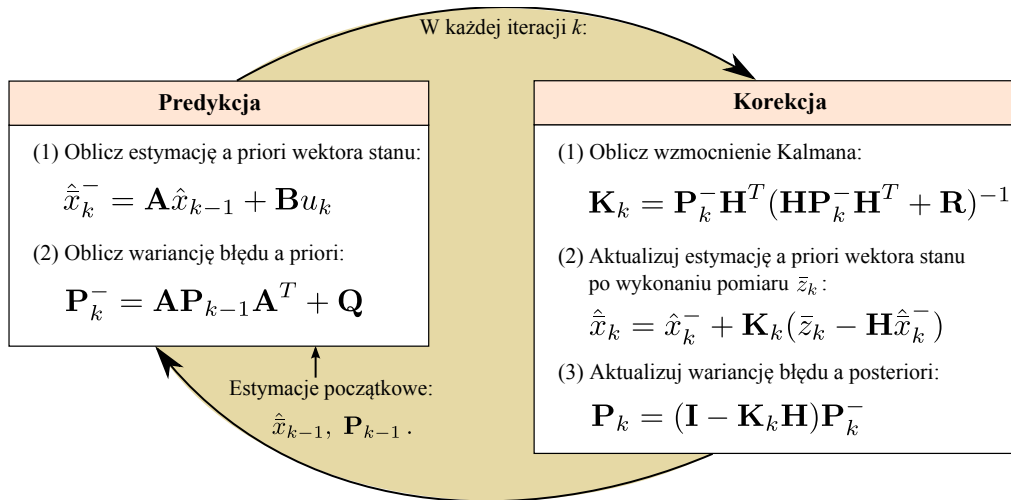
Jeśli wariancja błędu estymacji a priori \mathbf{P}_k^- zbiega do zera, to reszta wzmocnienia \mathbf{K} ma coraz mniejsze znaczenie. Oznacza to, że aktualny pomiar z_k jest bardziej niedokładny (coraz mniej prawdopodobny), a oczekiwany pomiar $\mathbf{H}\hat{x}_k^-$ jest szacowany bardziej dokładnie:

$$\lim_{\mathbf{P}_k^- \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = 0. \quad (1.13)$$

2 Algorytm dyskretnego filtru Kalmana

Filtr Kalmana estymuje proces (stan wewnętrzny układu dynamicznego), wykorzystując pewną postać układu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym: filtr estymuje stan procesu w pewnej chwili czasowej, uzyskując informację zwrotną w postaci pomiarów obarczonych szumem. W tej sytuacji, równania opisujące filtr Kalmana tworzą dwie grupy: (1) równania aktualizacji czasu (predykcja) i (2) równania aktualizacji pomiaru (korekcja).

Równania aktualizacji czasu (tzw. równania predyktora) są odpowiedzialne za obliczenie estymacji a priori (czasami nazywanej rzutowaniem w przód) stanu i błędu wariancji na potrzeby obliczeń wykonywanych w kolejnym kroku. Równania aktualizacji pomiaru (tzw. równania korektora) realizują sprzężenie zwrotne, tzn. wprowadzają nowy pomiar do estymacji a priori w celu uzyskania poprawionej (skorygowanej) estymacji a posteriori (schemat na rysunku 2.1).



Rysunek 2.1: Schemat predykcji i korekcji w algorytmie numerycznym filtru Kalmana.

3 Przykład zastosowania

3.1 3. Pierwszy przykład zastosowania

Sterowaniu podlega model podwójnego wahadła odwróconego z tarcie tocznym pokazany na rysunku 3.1 [4].

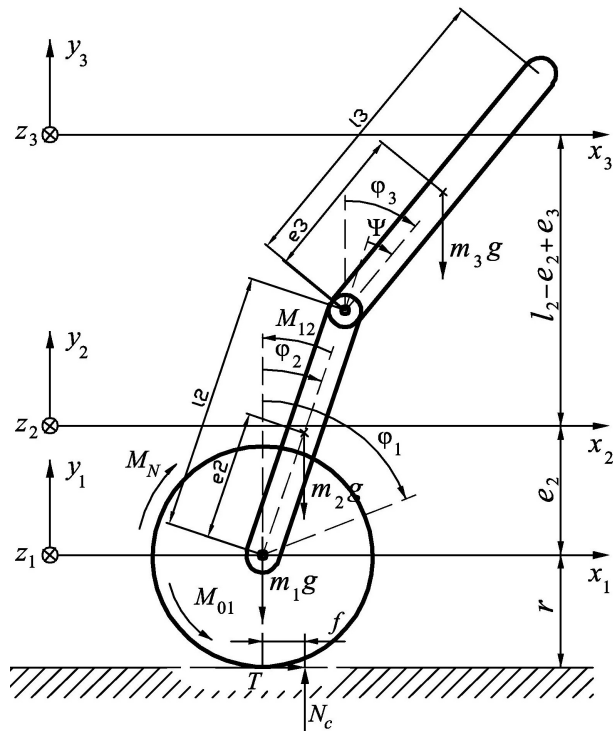
Wywołując funkcje Matlaba dane na rysunku 3.2 wysterowano położenie górnego wahadła do pozycji pionowej. Efekt jest widoczny na rysunku 3.3.

3.2 Drugi przykład na podstawie opracowania do laboratorium

Dany jest obiekt sterowania o transmitancji Laplace'a:

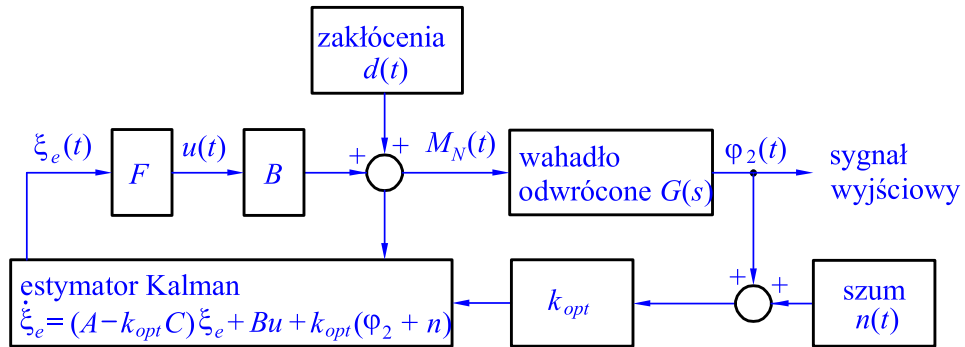
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (3.1)$$

Napisz procedurę numeryczną w Scilabie, realizującą algorytm dyskretnego filtru Kalmana, obliczającego estymację $\hat{x}(t)$ stanu $\bar{x}(t)$ obiektu sterowania danego transmitancją (3.1). Stan wewnętrzny $\bar{x}(t)$ jest poddany zakłóceniu $\bar{w}(t)$, natomiast pomiar $\bar{y}(t)$ na jego wyjściu, zakłóceniu $\bar{z}(t)$. Wariancje sygnału $\bar{w}(t)$ i $\bar{z}(t)$ są dane i wynoszą odpowiednio $\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2]^T = [1e - 5, 2e - 5]^T$ oraz $\mathbf{R} = [R_1, R_2]^T = [1e - 2, 0]^T$.



$$G(s) = \frac{2,328e^{-10} s^2 - 4,237e^4 s + 28,37}{s^3 + 1,495e^6 s^2 - 1,626e^5 s - 9,181e^6}$$

Rysunek 3.1: Obiekt regulacji i transmitancja operatorowa [4].

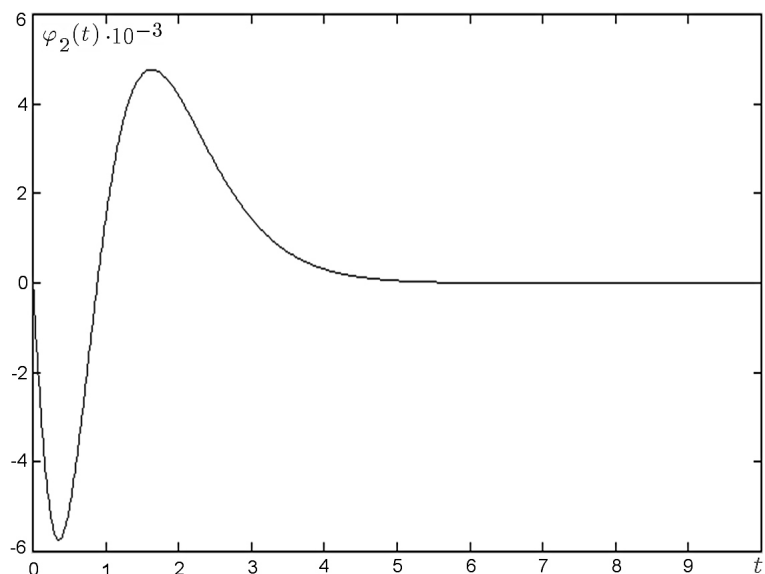


```

[A,B,C,D] = linmod('simulink_monocyk');
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D);
G = tf(num,den);
monocyk_ss = ss(G);
k_opt = lqry(monocyk_ss,10,1);
[A,B,C,D] = ssdata(monocyk_ss);
monocyk_separacja_ss = ss(A,[B,B],C,[D,D]);
k_Kalman = kalman(monocyk_separacja_ss,1,0.01);
F = lqgreg(k_Kalman,k_opt);
monocyk_feedback = feedback(monocyk_ss,F, 1);
t = 0:0.01:10;
[\varphi_2_kontrola,_t] = step(unicycle_feedback,t);
plot(t^T,\varphi_2_kontrola);

```

Rysunek 3.2: Schemat blokowy układu sterowania i kod procedury numerycznej [4]



Rysunek 3.3: Odpowiedź obiektu regulacji umieszczonego w układzie sterowania z estymatorem Kalmana.

Literatura

- [1] JACOBS O. *Introduction to Control Theory*, 2 ed. Oxford, 1993.
- [2] KALMAN R. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering* 82 (1960), 35–45.
- [3] MAYBECK P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol. 1. Academic Press, Inc., 1979.
- [4] Olejnik, P., Awrejcewicz, J., and Nielaczny, M. (2013). Solution of the Kalman filtering problem in control and modeling of a double inverted pendulum with rolling friction. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 1:63–70.
- [5] WELCH G., BISHOP G. *An Introduction to the Kalman Filter*, vol. 8. ACM, Inc., University of North Carolina, 2001.