

**Bifurkacje orbit okresowych
w układzie parametrycznie wymuszonego oscylatora
z nieliniowym tłumieniem
i progresywną charakterystyką sztywności**

Grzegorz Kudra

**Katedra Automatyki, Biomechaniki i Mechatroniki
Politechnika Łódzka**

27.06.2023

Modelowanie matematyczne, badania numeryczne i doświadczalne dynamiki bifurkacyjnej oscylatora mechanicznego o jednym stopniu swobody poruszającego się po liniowym łożysku tocznym, z okresowo zmienną i silnie progresywną charakterystyką sztywności. Badanie stabilności punktów stałych i orbit okresowych w układach parametrycznych. Portrety bifurkacyjne układu.

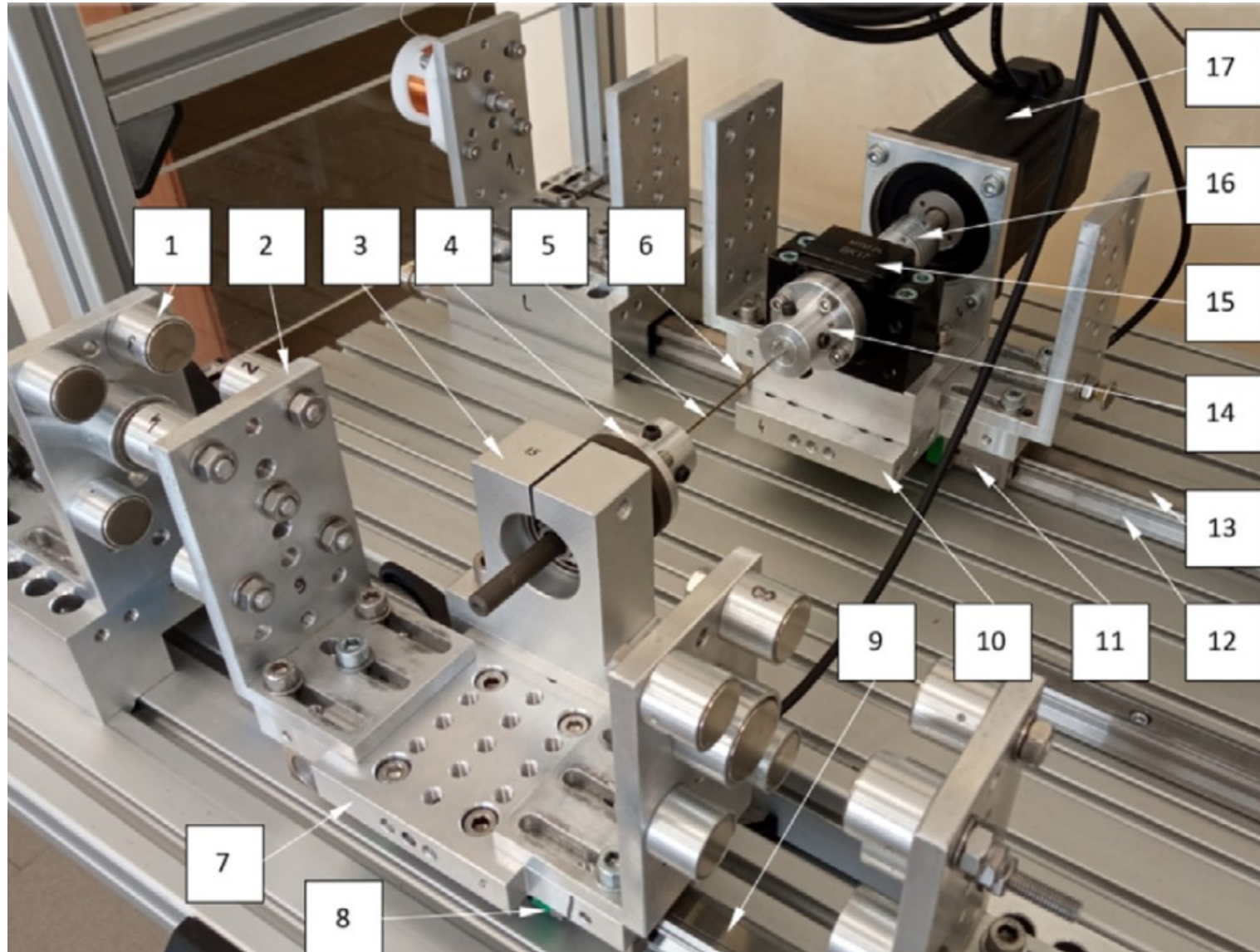
Plan prezentacji

- Stanowisko doświadczalne
- Model matematyczny
- Badanie stabilności punktów stałych i orbit okresowych
- Wykresy bifurkacyjne

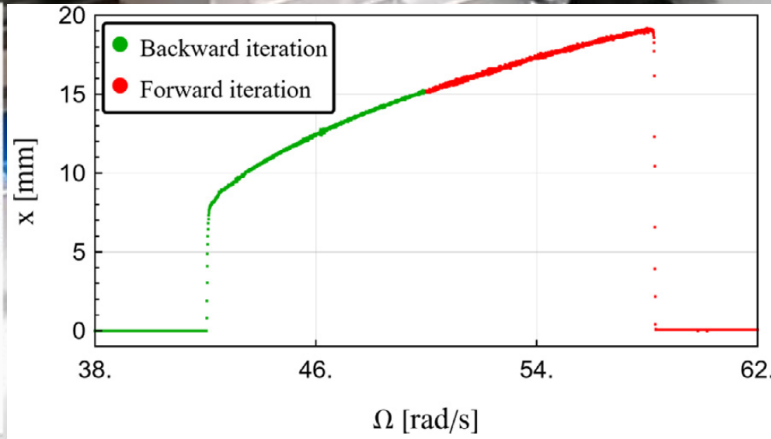
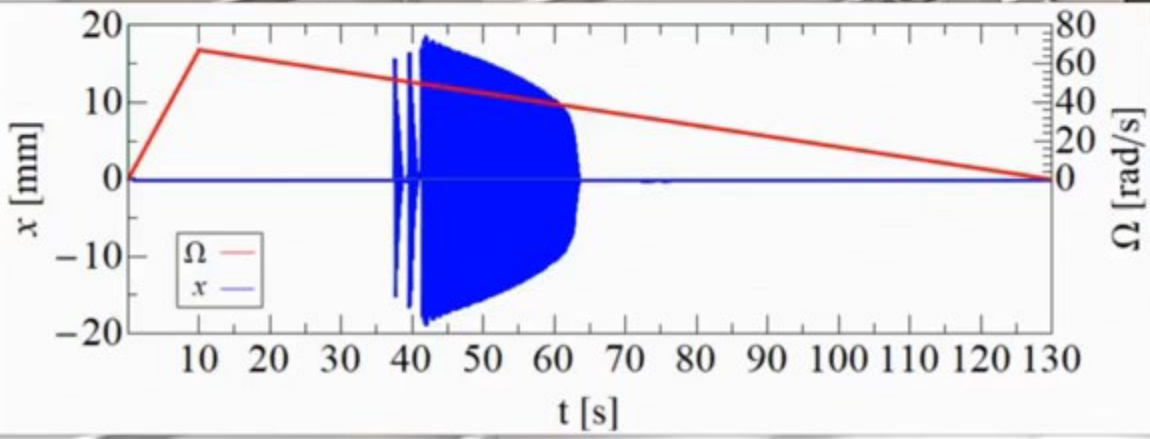
Publikacja

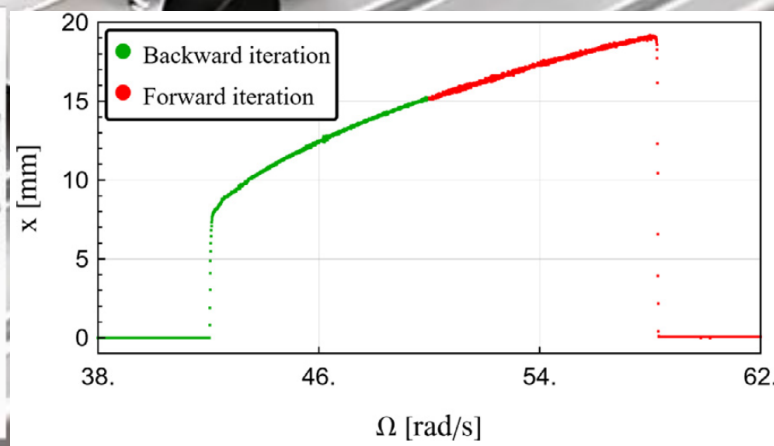
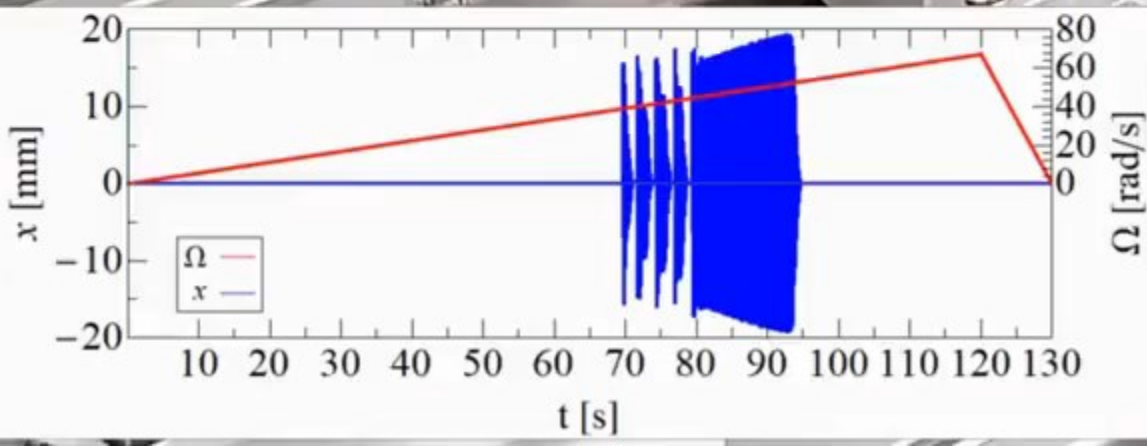
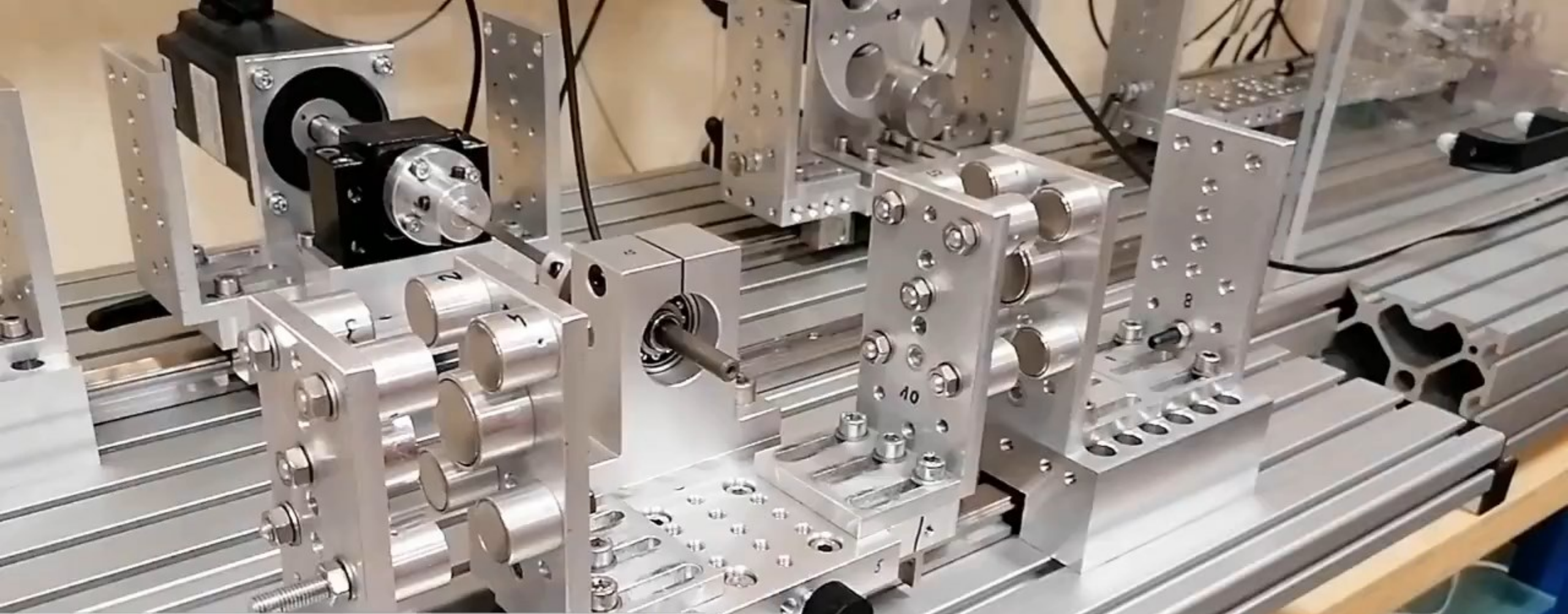
Kudra, G., Witkowski, K., Fasihi, A., Wasilewski, G., Seth, S., Polczyński, K., Awrejcewicz, J.: Bifurcation dynamics of 1DOF parametric oscillator with stiffness-hardening characteristic and dry friction. Journal of Sound and Vibration 543, 2023, 117356, doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117356

Stanowisko doświadczalne

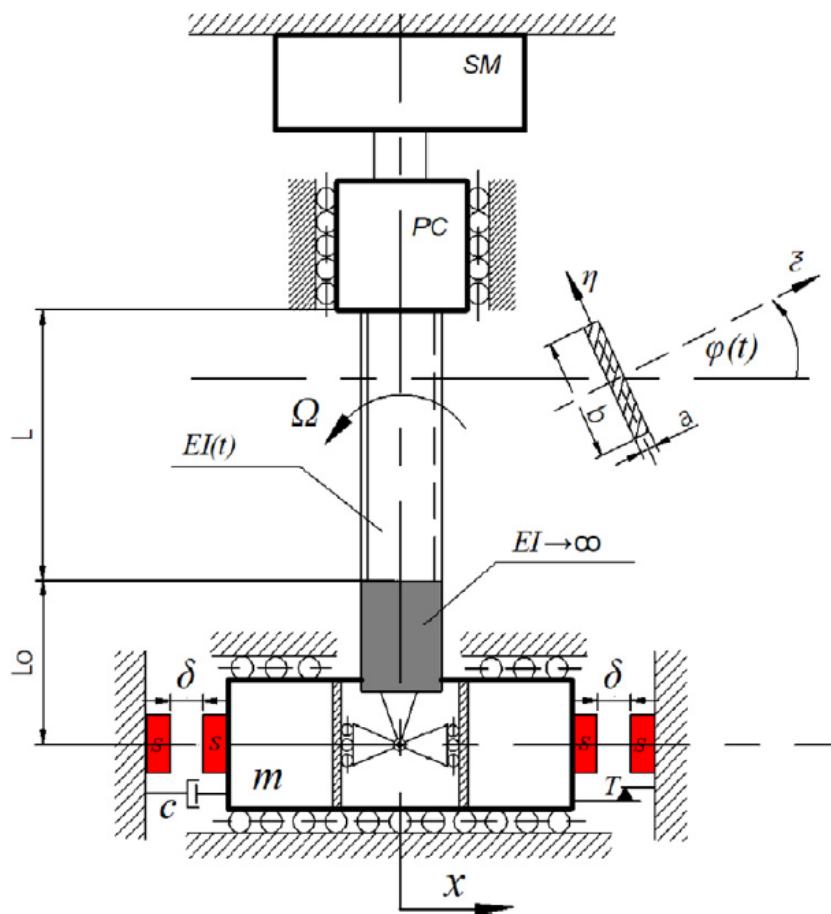


- 1 – magnesy neodymowe
- 2 – uchwyty magnesów
- 3 – ruchomy blok łożyskowy
- 4, 14 – uchwyty belki
- 5 – podatna belka
- 6 – hamulec ręczny
- 7 – ruchomy wózek
- 8, 11 – czujniki Halla
- 9 – szyna z taśmą magnetyczną
- 10 – unieruchomiony wózek
- 12 – szyna
- 13 – taśma magnetyczna
- 15 – stały blok łożyskowy
- 16 – sprzęgło podatne
- 17 – silnik krokowy





Model matematyczny



Postać wymiarowa równań ruchu

$$m\ddot{x} + F_R(\dot{x}) + F_S(x) + k(t)x = 0 \quad (1)$$

siła oporów ruchu w łożyskach:

$$F_R(\dot{x}) = c\dot{x} + T \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \varepsilon^2}}$$

siła oddziaływania pomiędzy magnesami:

$$F_S(x) = F_{MO} \left[\frac{1}{(1 + d(\delta - x))^4} - \frac{1}{(1 + d(\delta + x))^4} \right]$$

szttywność obracającej się belki:

$$k(t) = \frac{k_\xi + k_\eta}{2} + \frac{k_\xi - k_\eta}{2} \cos(2\Omega t)$$

Bezwymiarowa postać równań ruchu

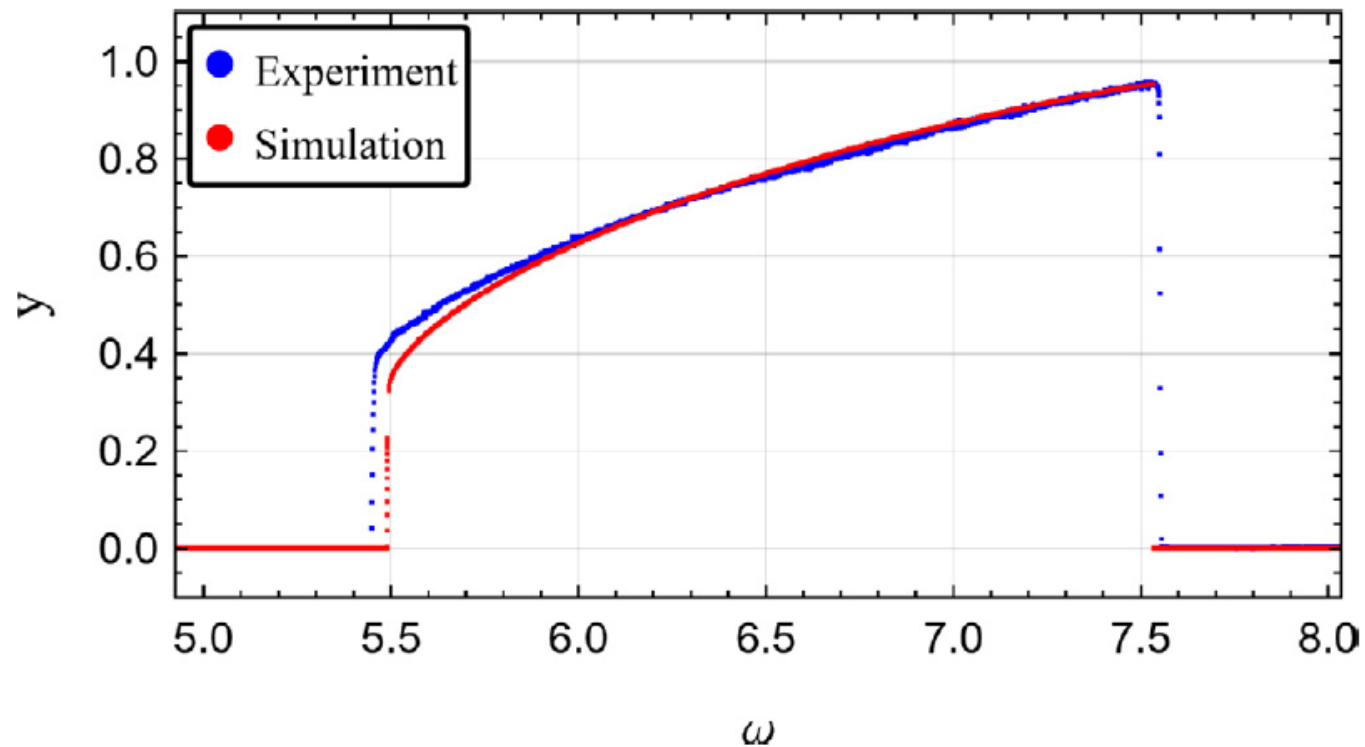
$$y'' + 2\zeta y' + \sigma \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + e^2}} + f_{m0} \left[\frac{1}{(1 + D(1 - y))^4} - \frac{1}{(1 + D(1 + y))^4} \right] + \frac{1 + \beta}{2} \left(1 + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \cos(2\omega t) \right) y = 0 \quad (2)$$

bezwymiarowy czas: $\tau = \omega_n t$

bezwymiarowe przemieszczenie: $y = \frac{x}{\delta}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_\xi}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n}, \quad \sigma = \frac{T}{m\omega_n^2\delta}, \quad e = \frac{\varepsilon}{\omega_n\delta}, \quad f_{m0} = \frac{F_{M0}}{k_\xi\delta}, \quad D = d\delta, \quad \beta = \frac{k_\eta}{k_\xi}$$

Po identyfikacji parametrów, uzyskano dobrą zgodność pomiędzy wynikami symulacji numerycznych i danymi doświadczalnymi:



$$y'' + 2\zeta y' + \sigma \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + e^2}} + f_{m0} \left[\frac{1}{(1 + D(1 - y))^4} - \frac{1}{(1 + D(1 + y))^4} \right] + \frac{1 + \beta}{2} \left(1 + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \cos(2\omega\tau) \right) y = 0$$

$$f_m(y) = \gamma_1 y + \gamma_3 y^3 + \dots \quad \gamma_1 = \frac{8 D f_{m0}}{(1 + D)^5}, \quad \gamma_3 = \frac{40 D^3 f_{m0}}{(1 + D)^7}$$

$$y'' + 2\zeta y' + \sigma \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + e^2}} + (p + q \cos(2\omega t)) y + \gamma_3 y^3 = 0 \quad (3)$$

$$p = \frac{1 + \beta}{2} + \gamma_1, \quad q = \frac{1 - \beta}{2}$$

Badanie stabilności punktów stałych i orbit okresowych

Zapiszmy układ w następującej postaci

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) \quad (4)$$

gdzie

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) = \begin{bmatrix} 2\zeta y_2 - \sigma \frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 + e^2}} + f_{m0} \left[\frac{1}{(1 + D(1 - y_1))^4} - \frac{1}{(1 + D(1 + y_1))^4} \right] - \frac{1 + \beta}{2} \left(1 + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \cos(2\omega\tau) \right) y_1 \end{bmatrix}$$

Niech $\delta \mathbf{y}(\tau)$ będzie nieskończenie małym zaburzeniem pewnego rozwiązania $\mathbf{y}_0(\tau) = [y_{10}(\tau) \quad y_{20}(\tau)]^T$ układu (4)

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{y}_0(\tau) + \delta \mathbf{y}(\tau)$$

Układ liniowych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach

$$\delta \mathbf{y}' = \mathbf{A}(\tau) \delta \mathbf{y} \tag{5}$$

gdzie

$$\mathbf{A}(\tau) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \mathbf{y}^T} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0(\tau)}$$

Ograniczając się do rozwiązania trywialnego $\mathbf{y}_0 = [0 \quad 0]^T$ układu (4):

$$\mathbf{A}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} \left[(\beta - 1) \cos(2\omega\tau) - \beta - \frac{16 D f_{m0}}{(1 + D)^5} - 1 \right] & -\frac{2e\zeta + \sigma}{e} \end{bmatrix}$$

Rozważmy następująca fundamentalną macierz rozwiązań układu (5)

$$\Phi(\tau, \tau_0) = [\delta y_1(\tau, \tau_0) \quad \delta y_2(\tau, \tau_0)]$$

uzyskaną z następującego zagadnienia początkowego

$$\Phi'(\tau, \tau_0) = \mathbf{A}(\tau)\Phi(\tau, \tau_0), \quad \Phi(\tau_0, \tau_0) = \mathbf{I}$$

Wiadomo, że znajomość fundamentalnej macierzy rozwiązań pozwala uzyskać dowolne inne rozwiązanie układu liniowego (5)

$$\delta y(\tau) = \Phi(\tau, \tau_0)\delta y(\tau_0)$$

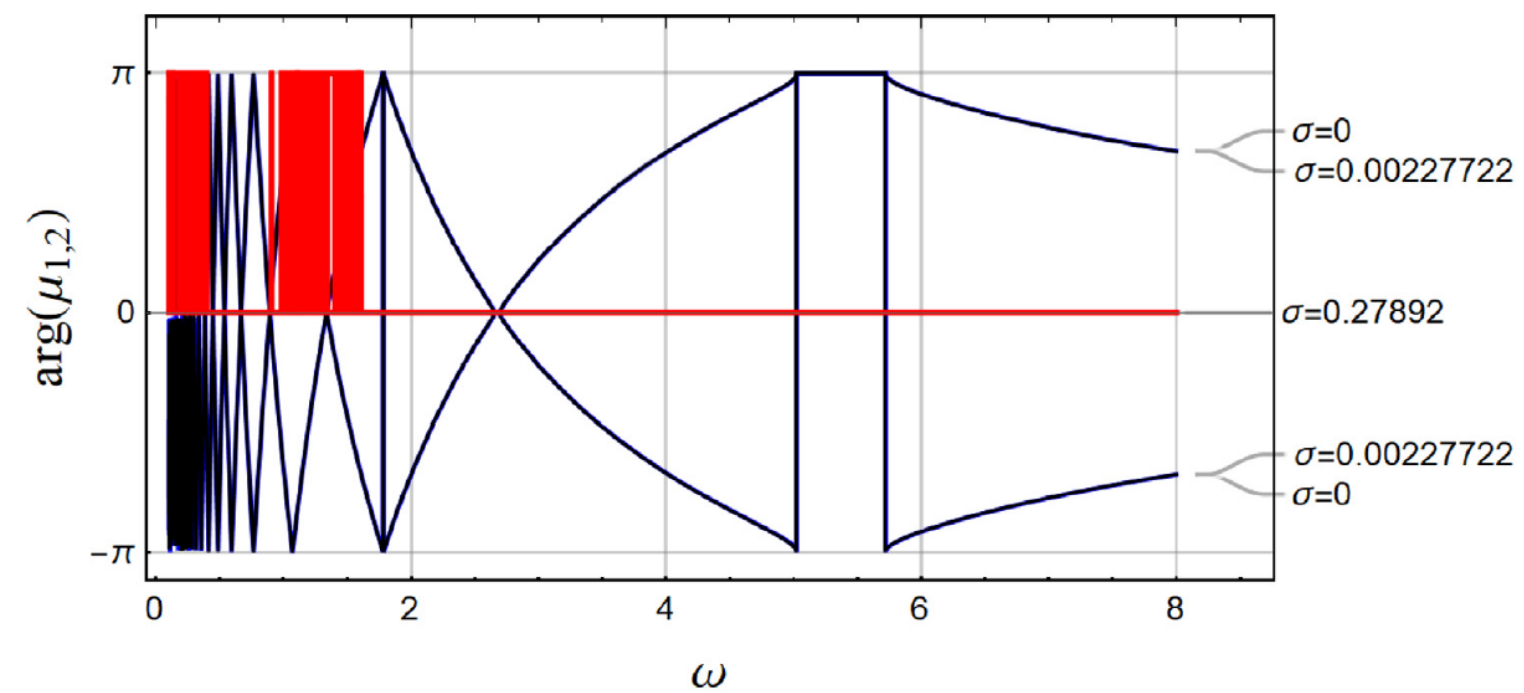
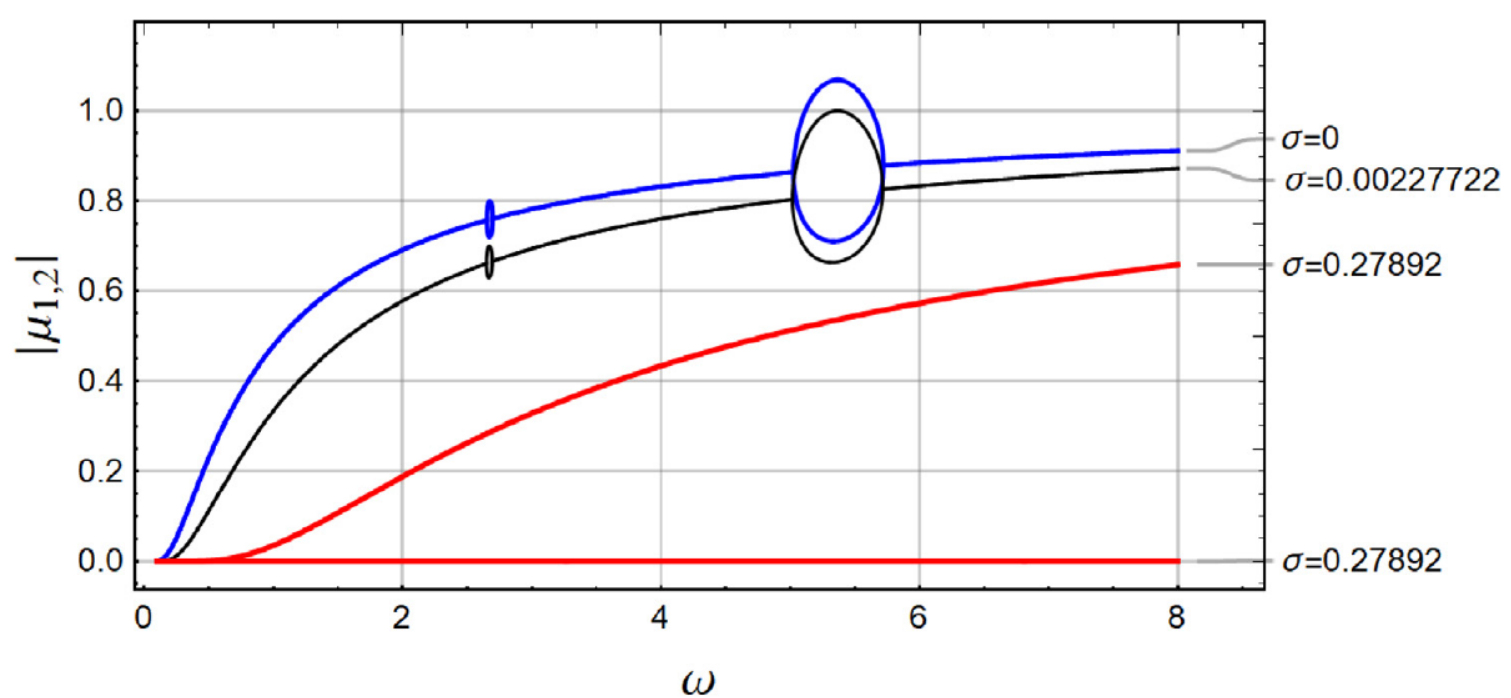
W tym przypadku mamy do czynienia z układem o współczynnikach okresowych $\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau + T)$, gdzie $T = \pi/\omega$. Możemy zatem zdefiniować następującą stałą macierz

$$\Phi^* = \Phi(\tau_0 + T, \tau_0)$$

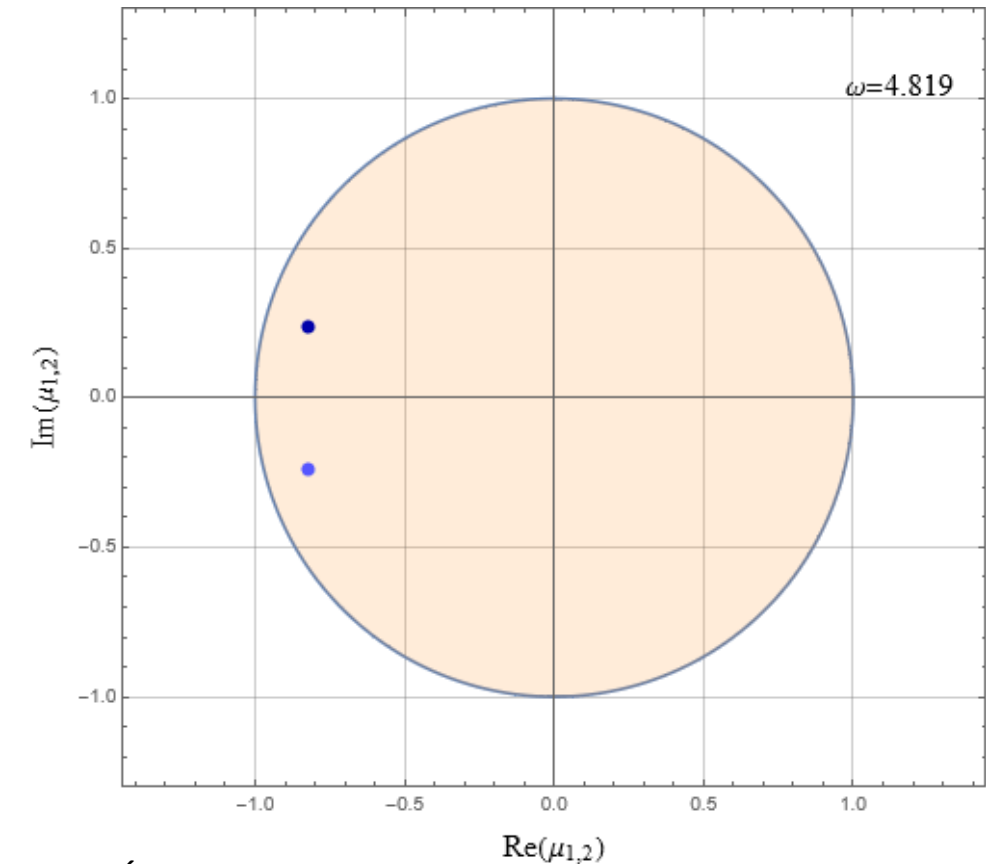
zwaną macierzą *monodromii*.

Wtedy ewolucja zaburzenia w czasie jednego okresu wymuszenia jest opisana następująco

$$\delta y(\tau_0 + T) = \Phi^* \delta y(\tau_0)$$

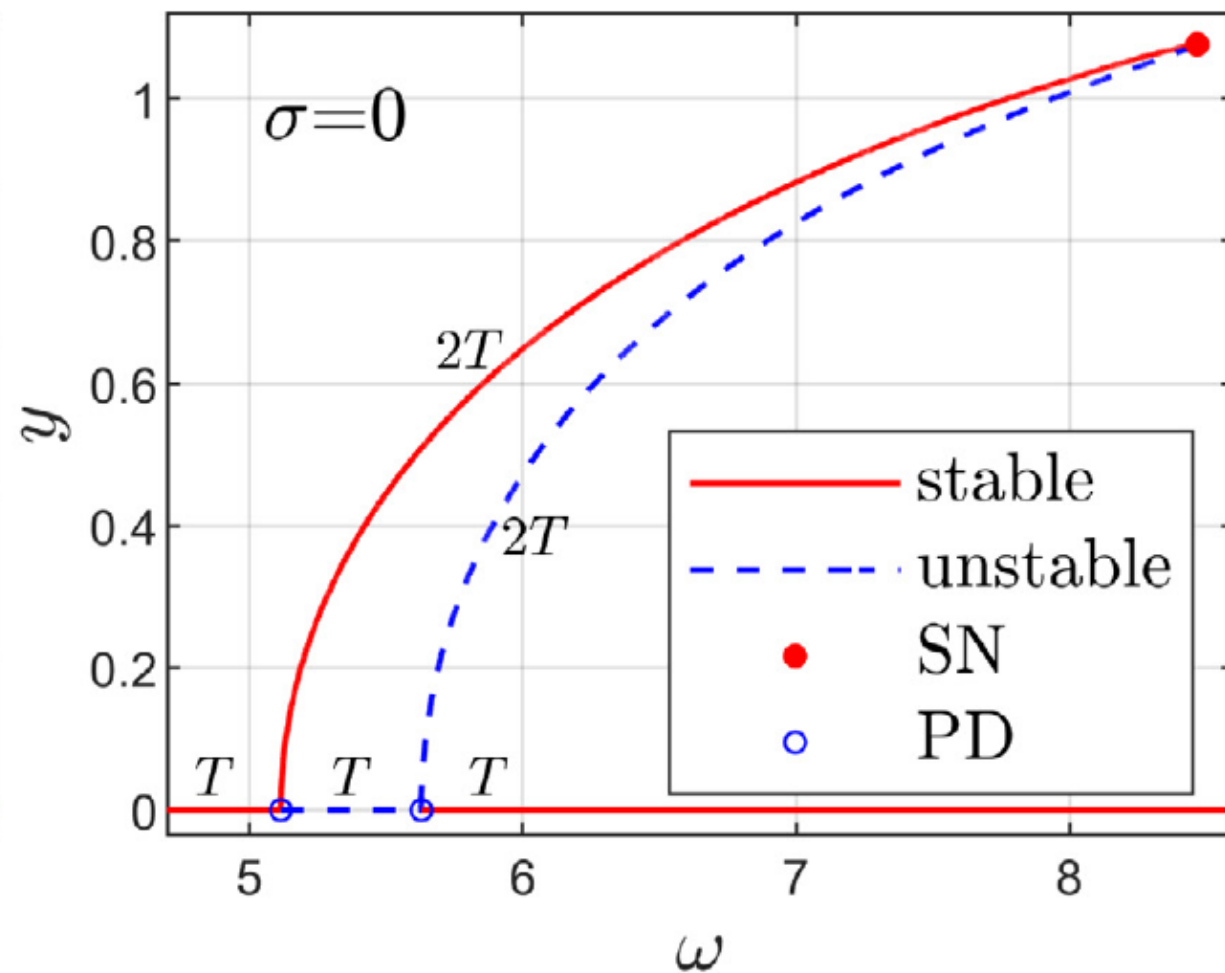
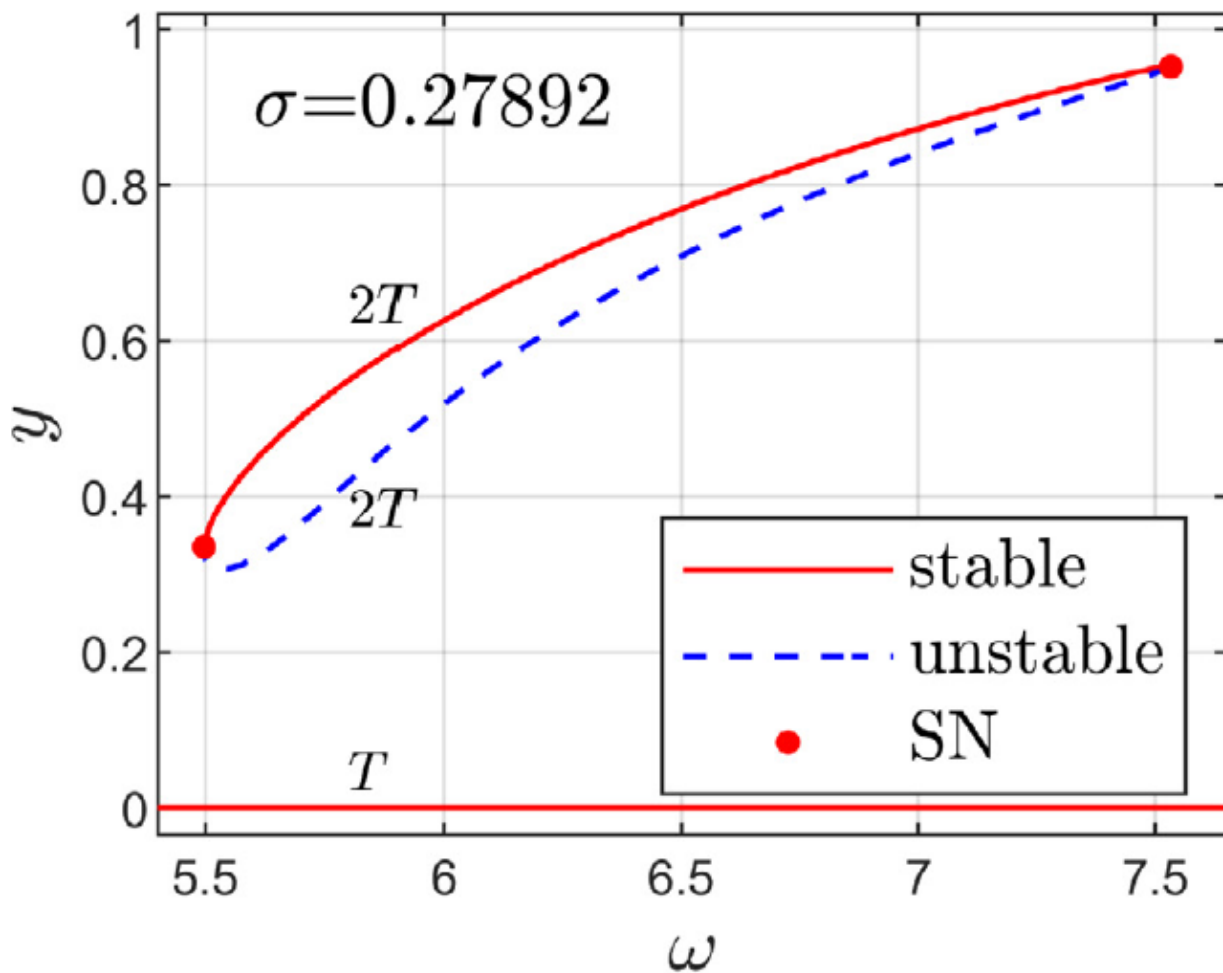


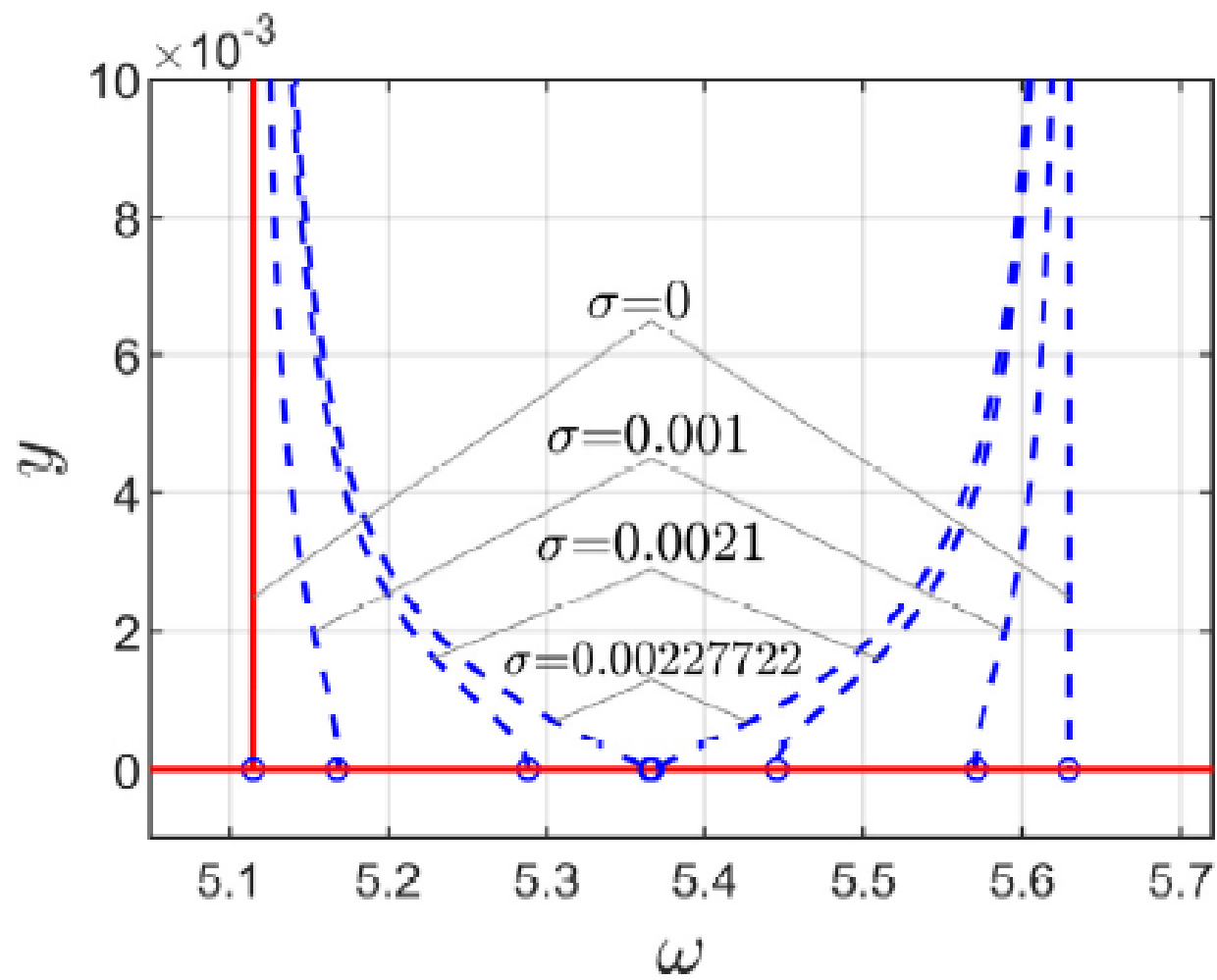
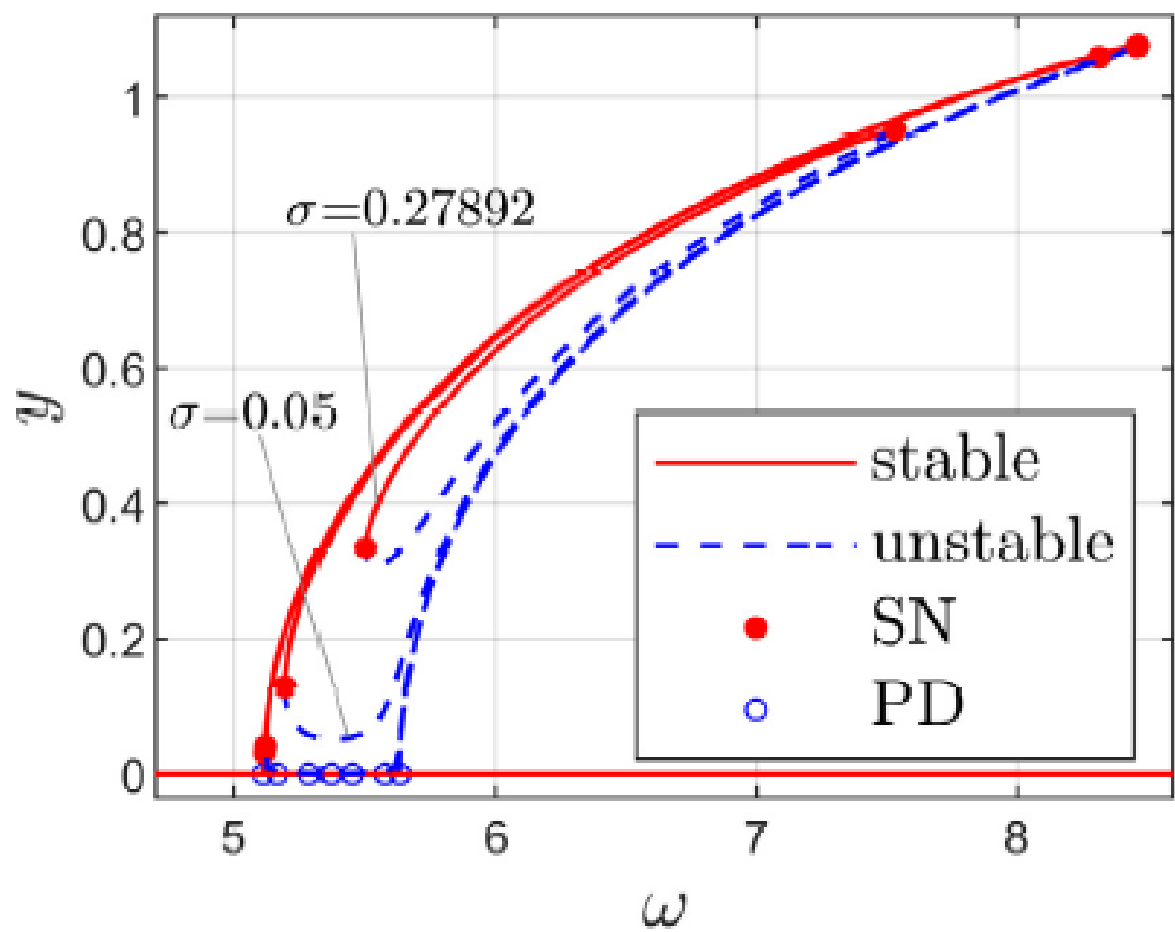
Po lewej: moduł i argument mnożników Floqueta (wartości własnych macierzy monodromii), w funkcji częstotliwości wymuszenia ω , dla różnych wartości tarcia σ

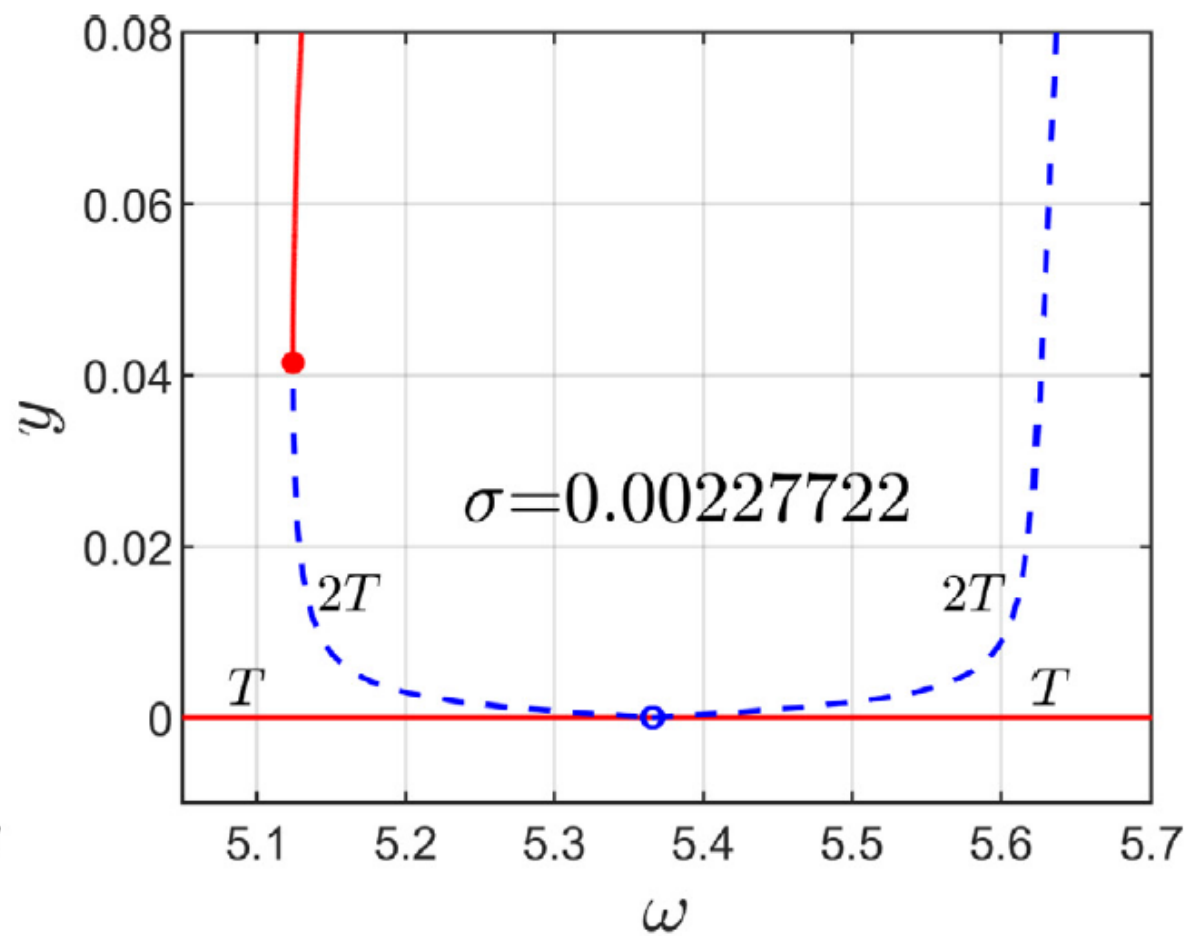
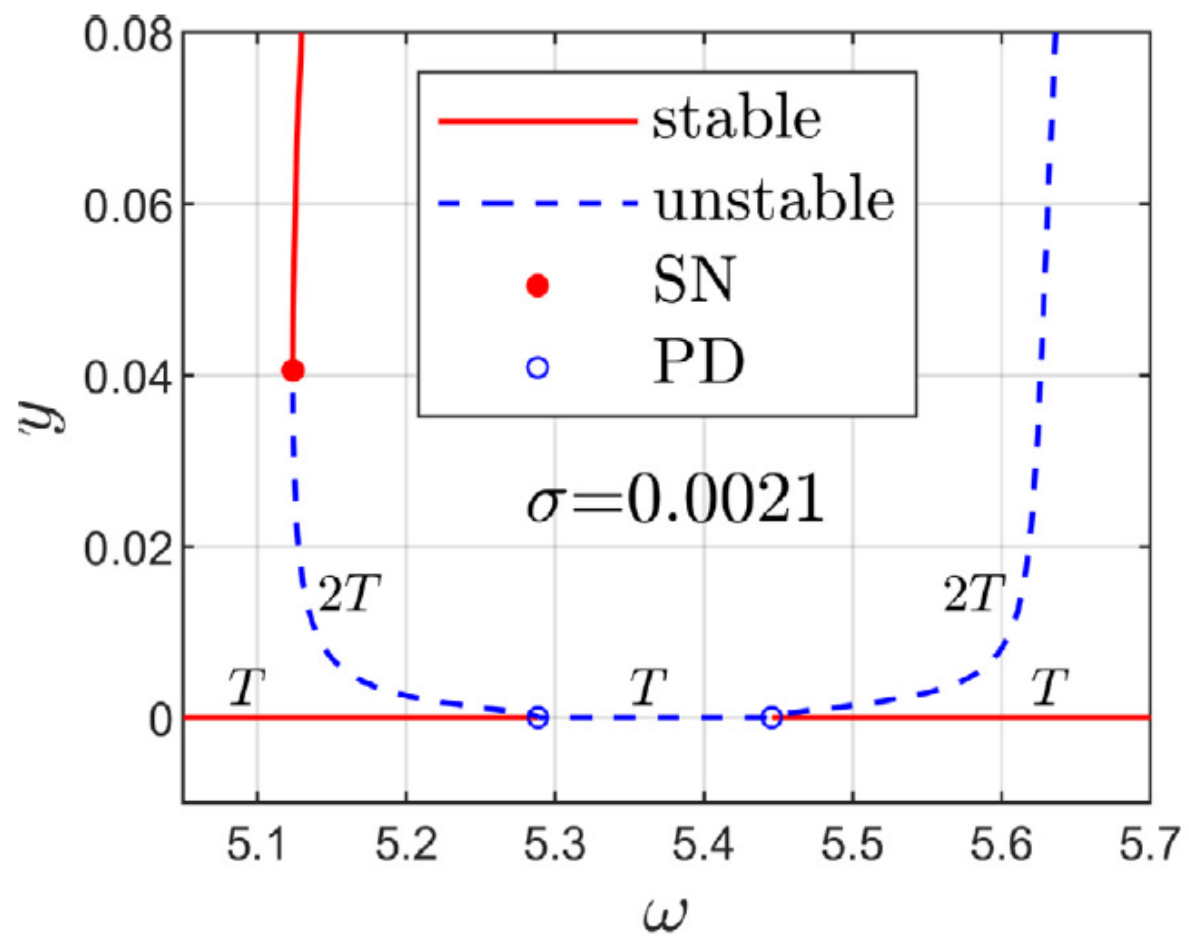


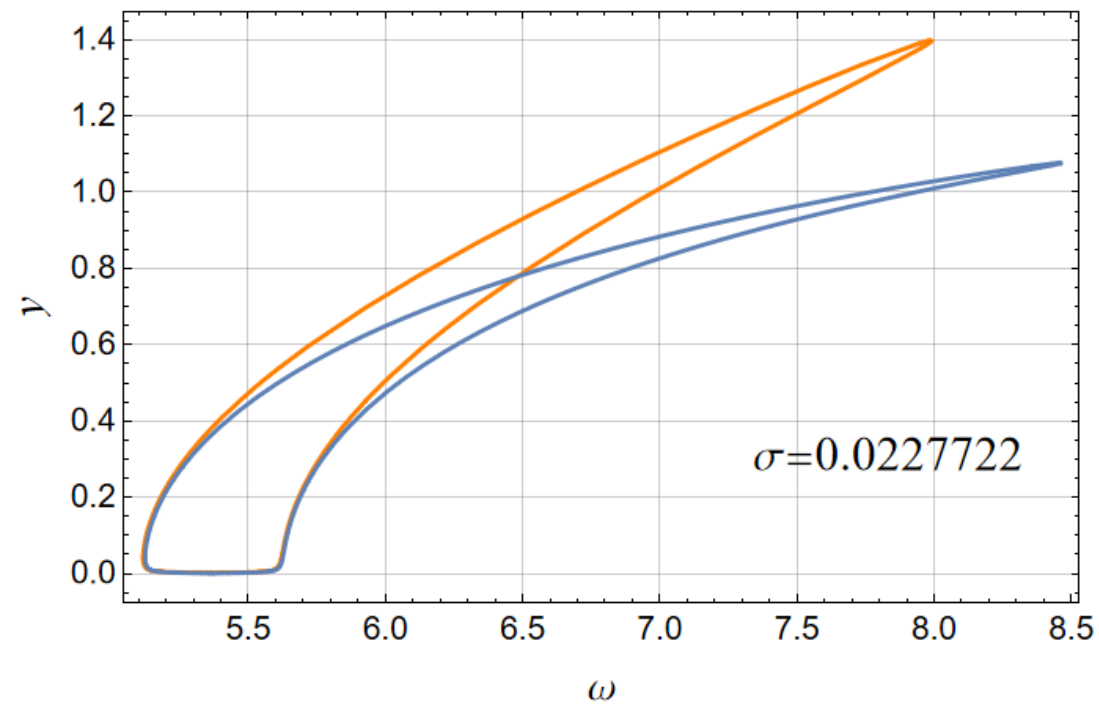
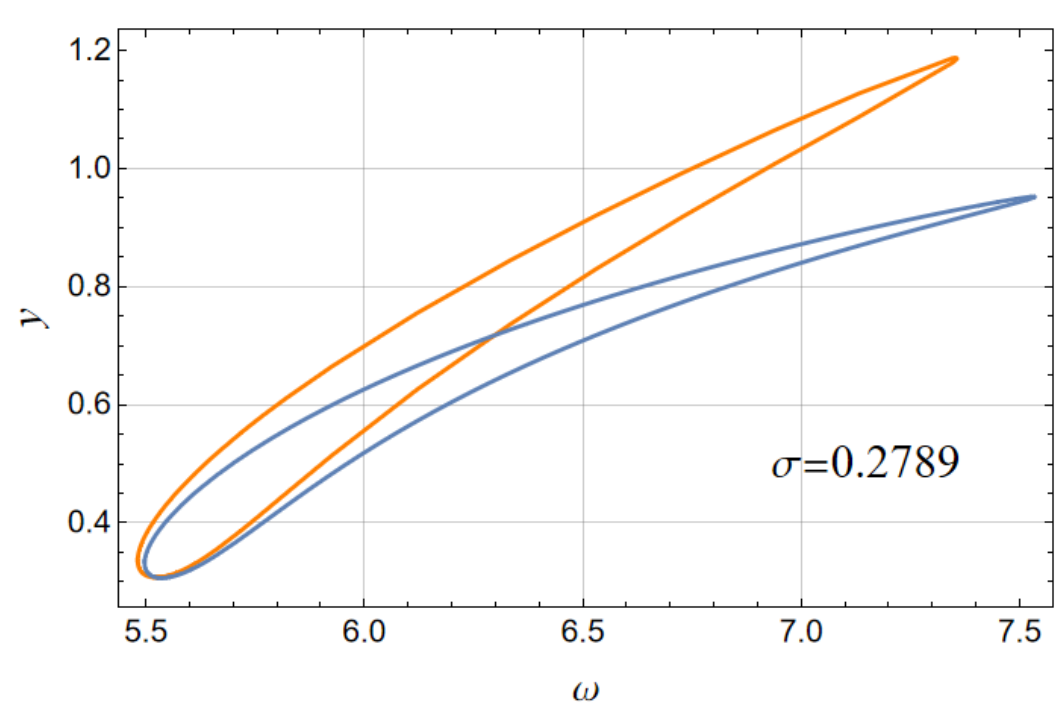
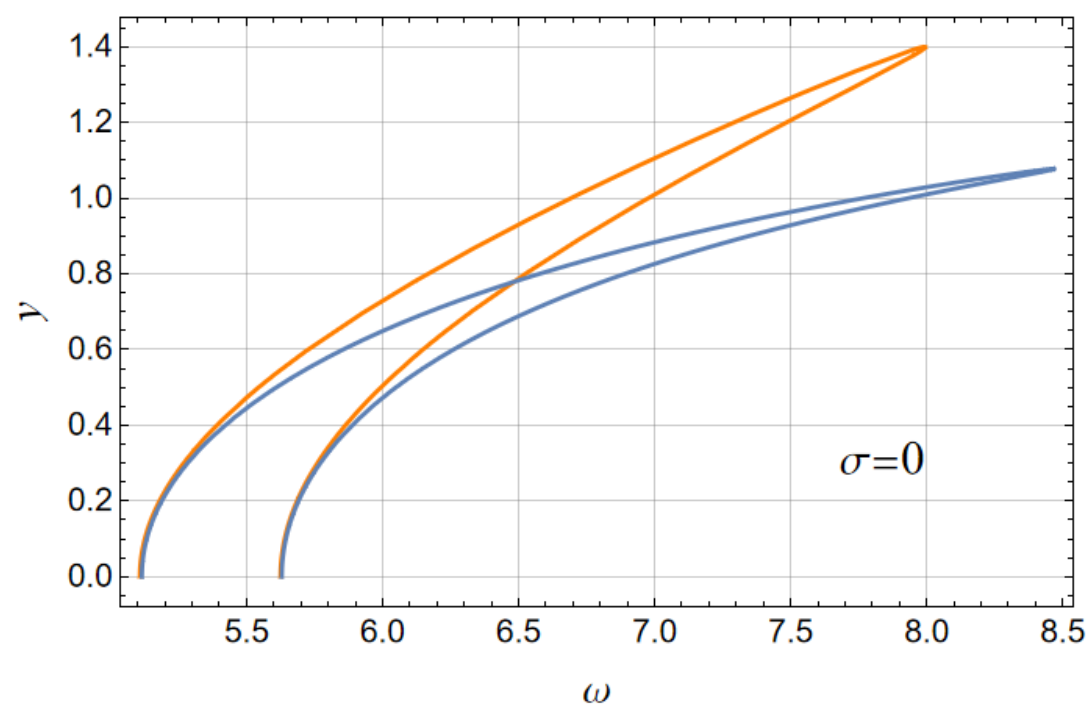
Ścieżka mnożników Floqueta po płaszczyźnie zespolonej dla $\sigma = 0$

Wykresy bifurkacyjne









— harmonic balance — numerical solution

Porównanie gałęzi rozwiązań okresowych
otrzymanych numerycznie dla równania pełnego (2)
i metodą bilansu harmonicznego dla równania (3)