

# Część 1

Biologiczne zjawiska stochastyczne  
w reologicznych modelach mięśni

# Procesy stochastyczne

- [gr. *stochastikós* "zdolny do domyślenia się czegoś"], inaczej **procesy losowe**,  
*mat. pojęcie teorii prawdopodobieństwa dotyczące ewolucji w czasie układów, które zależą od pewnego losowego czynnika (czynników). (PWN)*

- Funkcja losowa  $Y$  to odwzorowanie liczb rzeczywistych w zbiór zmiennych losowych

$$Y : t \rightarrow Y(t)$$

W zależności od tego jaką zmienną jest  $t$ , funkcję losową nazywamy

- procesem stochastycznym gdy  $t \in [0, \infty)$ ,
- łańcuchem stochastycznym, gdy  $t \in \mathbf{Z}$ ,
- polem stochastycznym jeśli  $t \in \mathbf{R}^D$ .

# Procesy stacjonarne i niestacjonarne

## Definicja

Proces stochastyczny (bądź szereg losowy) jest stacjonarny w sensie ścisłym, gdy zmienne losowe  $X(t)$  oraz  $X(t+\epsilon)$  mają te same rozkłady  $n$ -wymiarowe (rozkłady łączne)  $f(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f(x_1, t_1 + \epsilon; x_2, t_2 + \epsilon; \dots; x_n, t_n + \epsilon)$ , dla dowolnych  $n$  i  $\epsilon$ .

## Uwagi

1.  $f(x_1, t_1) = f(x_1, t_1 + \epsilon)$

oznacza, że funkcja rozkładu nie zależy od czasu, t.j.  $f(x_1, t_1) = f(x_1)$ .

Wynika z tego natychmiast, że wartość oczekiwana jest również stałą funkcją czasu  $\langle m(t) \rangle = m$ .

## 2. Równość

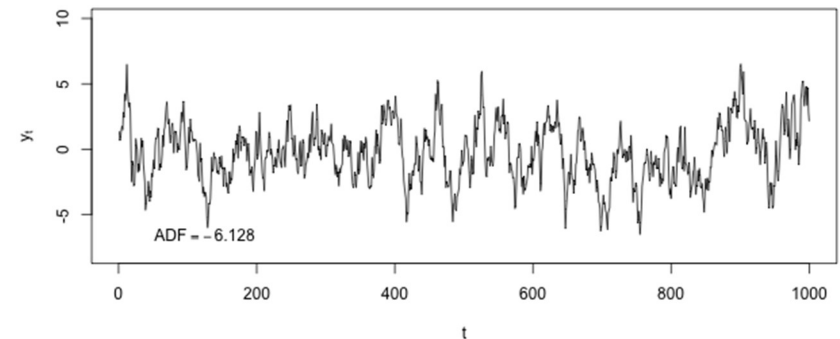
$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = f(x_1, t_1 + \epsilon; x_2, t_2 + \epsilon)$$

zachodzi tylko wtedy, gdy funkcja rozkładu zależy tylko od różnicy czasu

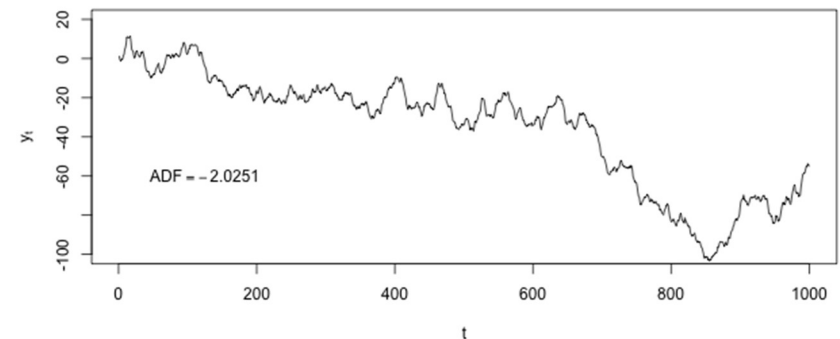
$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = f(x_1, x_2, t_1 - t_2).$$

Oznacza to, że w tym przypadku funkcja korelacyjna też zależy tylko od różnicy czasu  $\langle x(t+\epsilon)x(t) \rangle = R(\epsilon)$ .

Stationary Time Series



Non-stationary Time Series

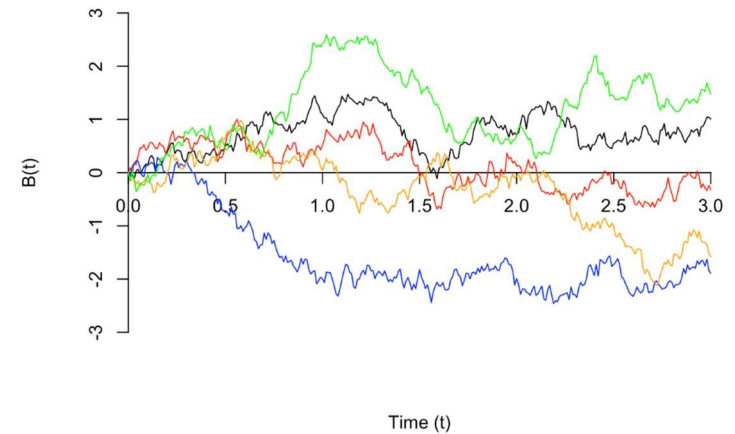
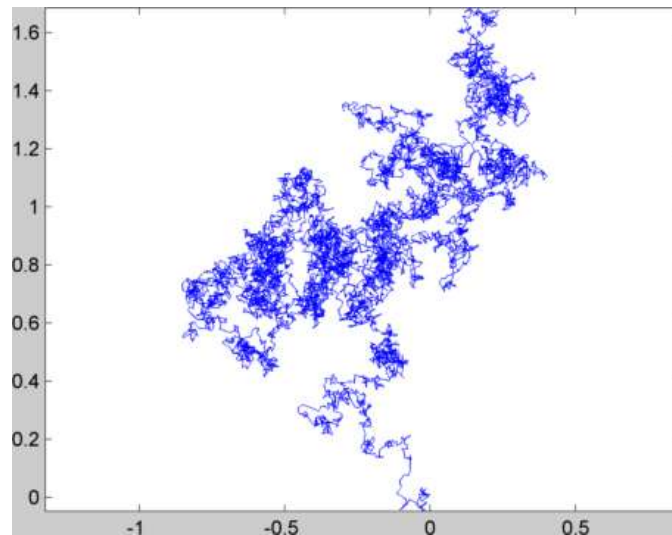
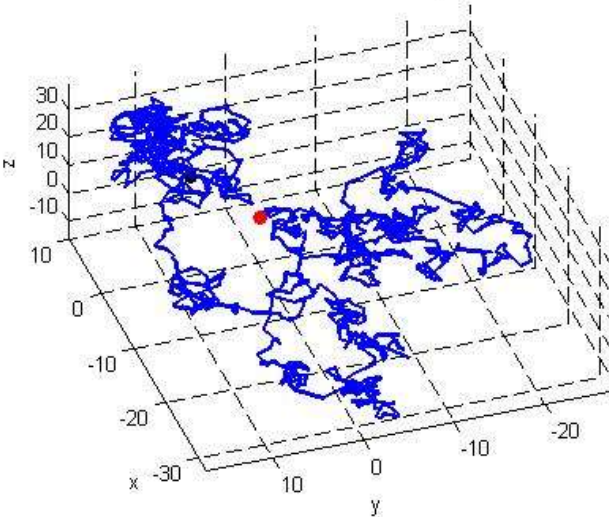


# Proces Wienera (ruchy Browna)

-> szczególny przypadek procesu Levy'ego

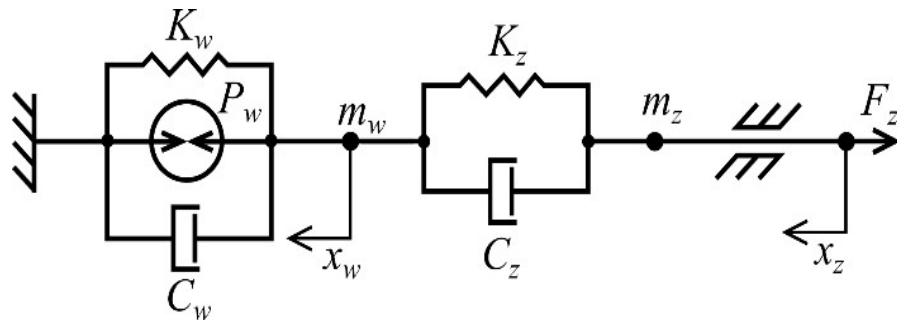
Typowy przykład ruchów Browna:

Three dimensional Brownian Motion,  $d=20.6188$  units



Proces Levy'ego: przyrosty niezależne, stacjonarny, ciągły wg. prawdopodobieństwa

# Model matematyczny mięśnia szkieletowego



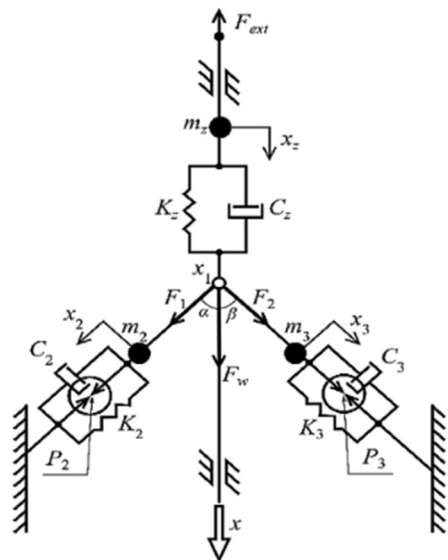
$K_w, K_z$  – sztywność tkanek aktywnych i pasywnych  
 $C_w, C_z$  – tłumienie tkanek aktywnych i pasywnych  
 $m_w, m_z$  – masa tkanek aktywnych i pasywnych  
 $x_w$  – przemieszczenie tkanki aktywnej  
 $x_z$  – przemieszczenie przyczepu mięśnia  
 $P_w$  – siła generowana przez tkankę aktywną  
 $F_z$  – siła zewnętrzna

$$\begin{aligned}
 m_w \ddot{x}_w + C_w \dot{x}_w + K_w x_w - C_z (\dot{x}_z - \dot{x}_w) - K_z (x_z - x_w) &= P_w(t), \\
 m_z \ddot{x}_z - C_z (\dot{x}_z - \dot{x}_w) - K_z (x_z - x_w) &= -F_z(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_j(t) &= k_j x_j^2 + N(t) + S(t), \quad j = w, z \\
 C_j(t) &= c_j \dot{x}_j^2 + N(t), \quad j = w, z
 \end{aligned}$$

$k_j$  – współczynnik korekcyjny współczynnika sztywności  
 $N(t)$  – szum zależny od czasu  
 $S(t)$  – funkcja sinuso-kształtna  
 $c_j$  – współczynnik korekcyjny współczynnika tłumienia

# Modele klasyczne vs rzeczywistość



Wojnicz, W., Zagrodny, B., Ludwicki, M., Awrejcewicz, J., Wittbrodt, E., 2017. A two dimensional approach for modelling of pennate muscle behaviour. Biocybernetics and Biomedical Engineering 37, 302-315.. <https://doi.org/10.1016/j.bbe.2016.12.004>

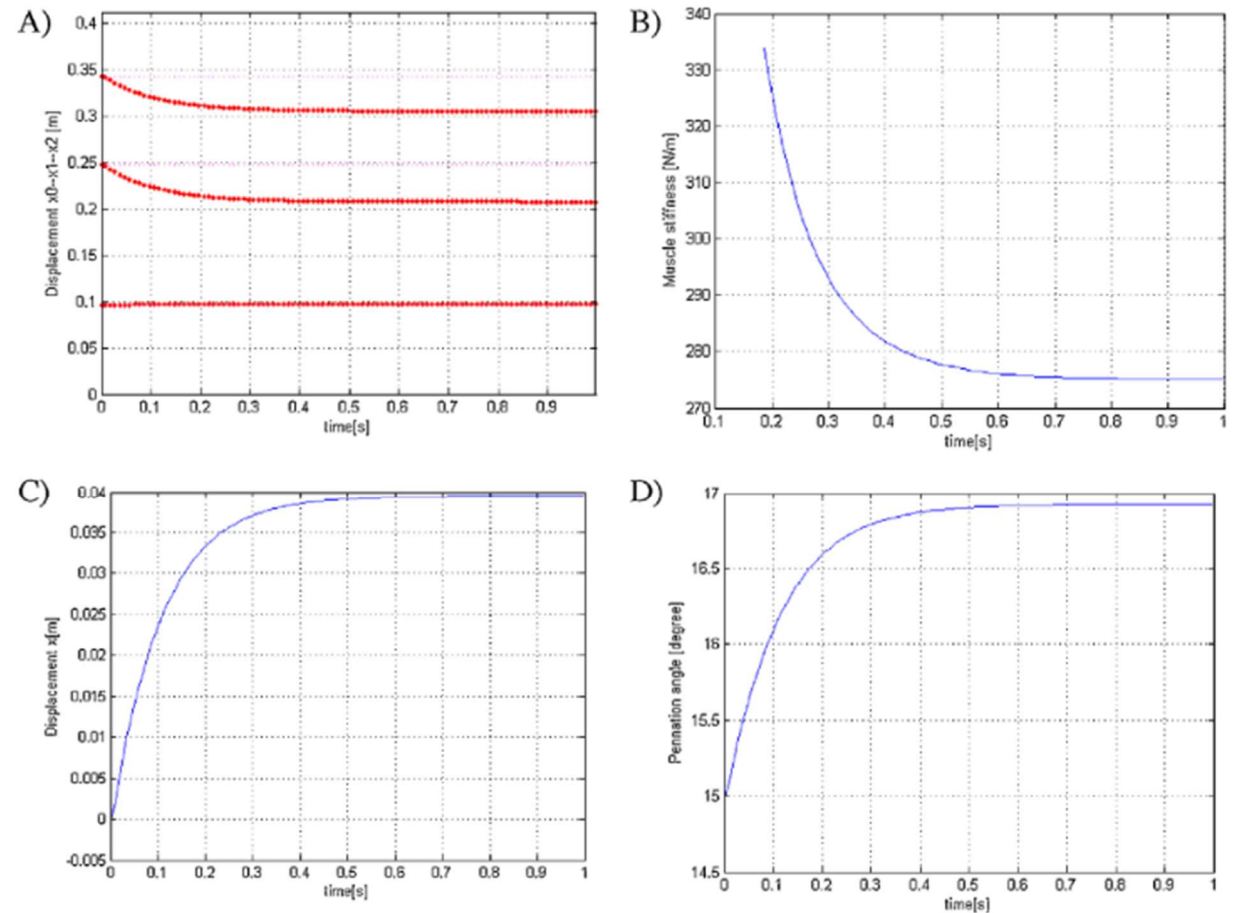
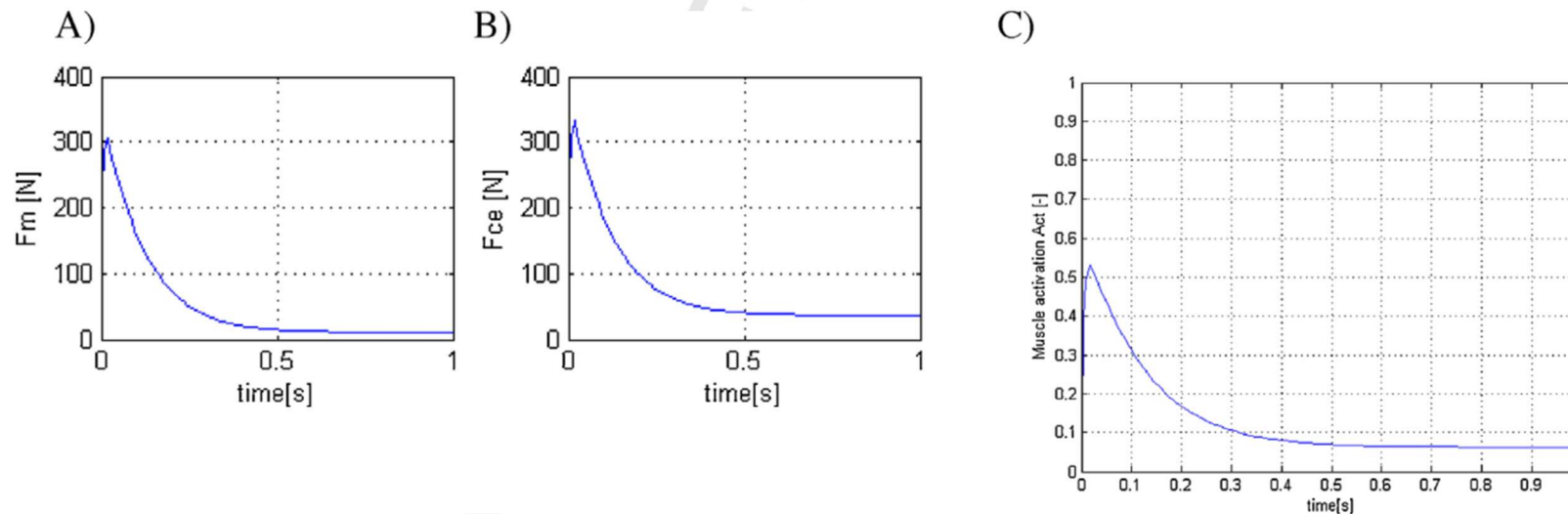


Fig. 7 – Numerical simulation results of unipennate muscle model WW: A) displacement of muscle points; B) stiffness of muscle; C) muscle insertion displacement  $x$ ; D) pennation angle  $\alpha_p$ .

# Modele klasyczne vs rzeczywistość

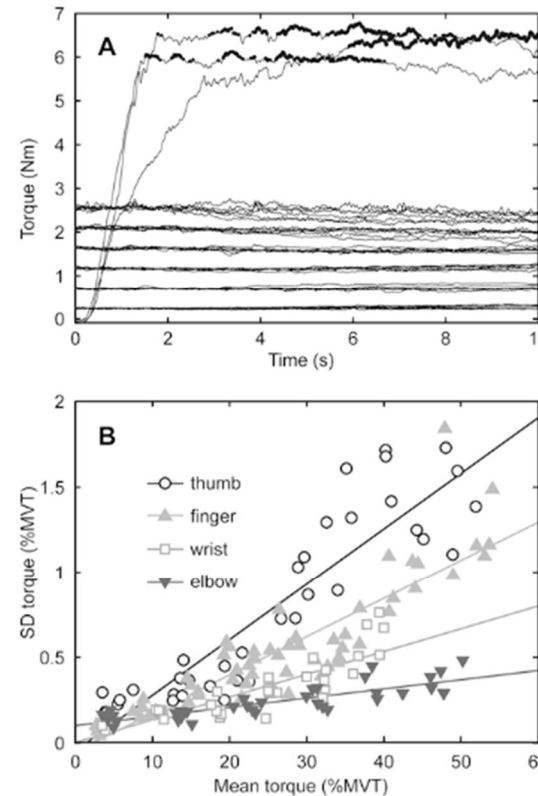
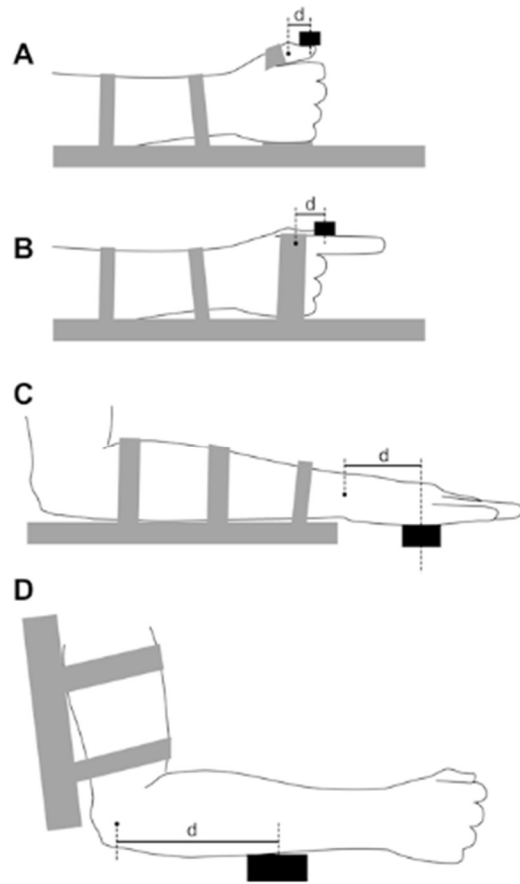


**Fig. 8 – Numerical simulation results of Hill-Zajac unipennate muscle model: A) contractile muscle force  $F_m$ ; B) force of contractile element  $F_{ce}$ ; C) Muscle activation  $Act$ .**

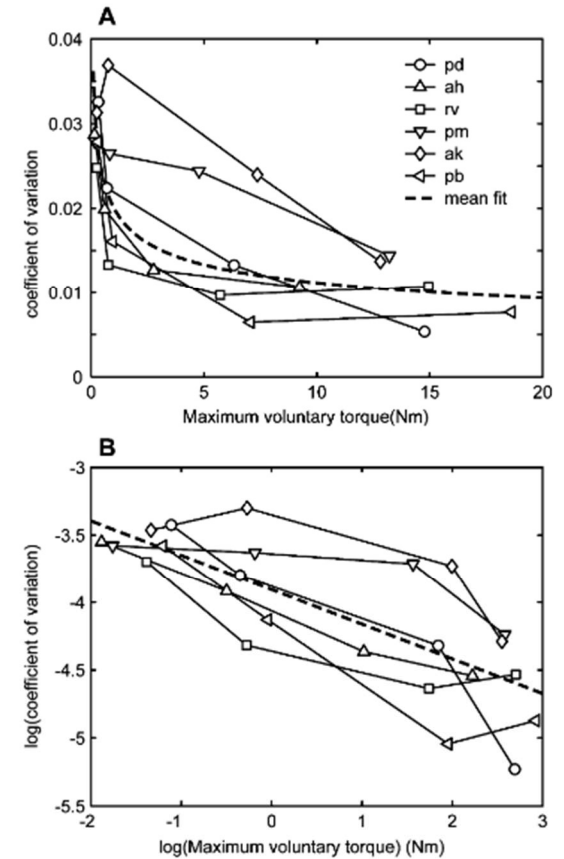
Wojnicz, W., Zagrodny, B., Ludwicki, M., Awrejcewicz, J., Wittbrodt, E., 2017. A two dimensional approach for modelling of pennate muscle behaviour. Biocybernetics and Biomedical Engineering 37, 302-315.. <https://doi.org/10.1016/j.bbe.2016.12.004>

# Modele klasyczne vs rzeczywistość

De C. Hamilton, A.F., Jones, K.E., Wolpert, D.M., 2004. The scaling of motor noise with muscle strength and motor unit number in humans. *Experimental Brain Research* 157, 417-430.  
<https://doi.org/10.1007/s00221-004-1856-7>



**Fig. 2A, B** Torque data from a single subject. **A** Example torque traces recorded from subject PD during wrist flexion. The *three highest traces* are the three trials when the subject was asked to produce his maximum voluntary contraction, and the *black dots* indicate the 1,000 highest points (i.e. 4 s) on each trace used to calculate the MVT for this joint (6.33 Nm). The *lower traces* are the 36 trials where the subject was asked to match a target torque level; visual feedback was removed 2 s into the trace. **B** Relationship between mean torque and standard deviation of torque for subject PD, plotted as a percentage of maximum voluntary torque. Thirty-six symbols are plotted for each muscle indicating the mean and standard deviation on each trial. *Solid lines* indicate the linear regression  $sd = a \text{ mean} + b$  for each muscle; the fit parameters are ( $a, b, r^2$ ): thumb: 0.033, -0.047, 0.82; finger 0.022, -0.050, 0.78; wrist: 0.013, 0.002, 0.77; elbow: 0.005, 0.102, 0.69, and all fits were significant at  $p < 0.001$ . The slope parameter  $a$  gives the coefficient of variation for each muscle

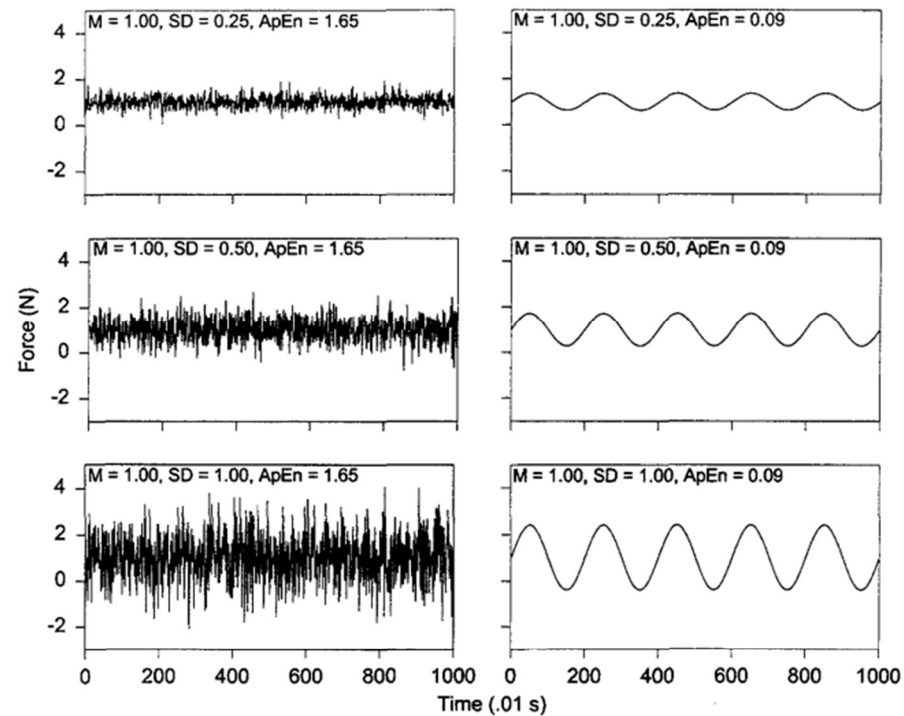


**Fig. 3A, B** The relationship between maximum voluntary torque and coefficient of variation for all subjects and all joints. The data is plotted on linear axes in **A** and the natural log of the same data is plotted in **B**. The four joints studied in each subject are connected by a *fine line*. In each case, the *leftmost symbol* plots the CV of torque generated by the thumb against the MVT of the thumb, followed by equivalent data for the finger, wrist and elbow in order. Linear regression was performed on the log of the data for each subject, and the average fit over all subjects is shown as a *heavy line* in both plots. The fit parameters for each subject are given in the upper part of Table 2

equivalent to Fig. 3A, B, and for comparison the mean fit



# Modele klasyczne vs rzeczywistość



Slifkin, A. B., & Newell, K. M. (1999). Noise, information transmission, and force variability. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 25(3), 837-851. doi:10.1037/0096-1523.25.3.837

*Figure 1.* The independence of measures of time-series structure and measures of performance outcome. In all time series, the mean simulated force output was 1 N. However, from top to bottom in both the left (white Gaussian noise) and right (sine waves) panels, there is a fourfold increase in the standard deviation and a fourfold decrease in the signal-to-noise ratio ( $M/SD$ ). Nevertheless, the approximate entropy (ApEn) measure of signal structure did not change among the time series in the left or right panels. Comparisons of white-noise and sine-wave time series with equivalent means and standard deviations reveal large differences in structure, as evidenced by visual inspection and by the approximate entropy scores. These simulated force-time series were generated with Matlab 4.2 (1994; see Footnote 2 for details).

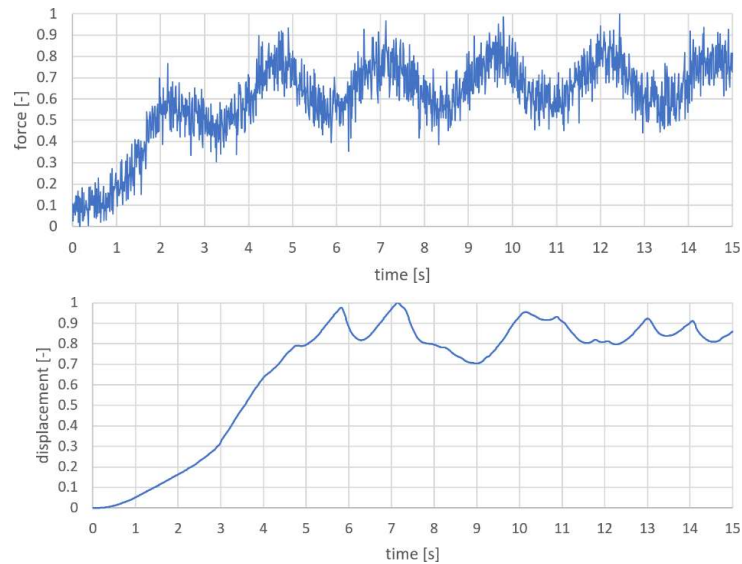
# Zjawiska wewnętrzne wpływające na generowaną przez mięśnie siłę

- Wielkość i wytrenowanie mięśnia -> siła maksymalna i zdolność jej utrzymania
- Sprawność układu nerwowego -> niższa amplituda zmienności sygnału pobudzającego mięsień do skurczu
- Współpraca z antagonistami -> stabilność poziomu wygenerowanej siły
- Temperatura -> sztywność, tłumienie, zdolność do generowania siły maksymalnej
- Poziom skurczu -> sztywność, tłumienie (?), zwiększenie amplitudy wahań siły
- Zmęczenie mięśni -> sztywność, tłumienie (?), zwiększenie amplitudy wahań siły
- Choroby układu mięśniowo-nerwowego -> zwiększenie amplitudy wahań siły

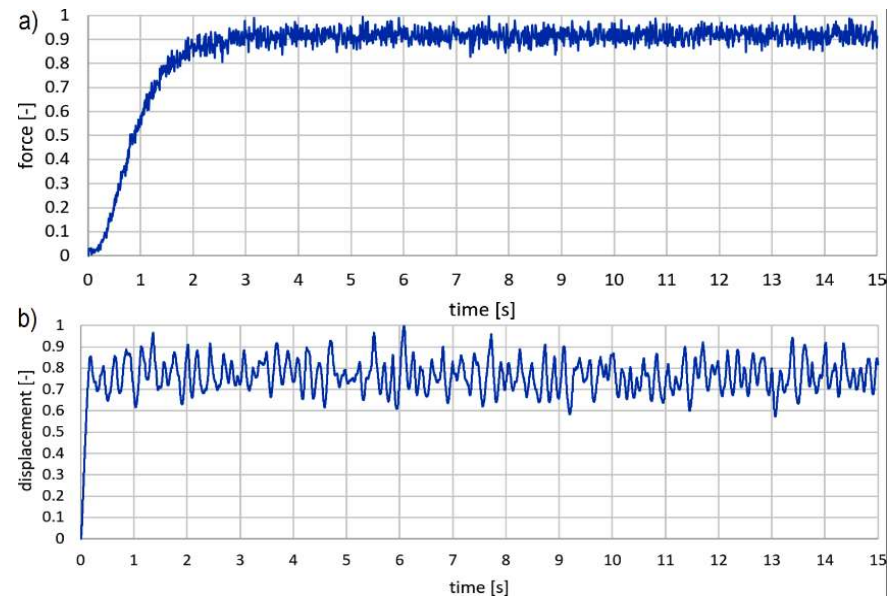
# Zjawiska zewnętrzne wpływające na generowaną przez mięśnie siłę

- Obciążenie zewnętrzne i jego historia -> zmęczenie mięśni
- Zakłócenia zewnętrzne (np. zmiana siły obciążającej)
- Drgania

# Wyniki symulacji numerycznych



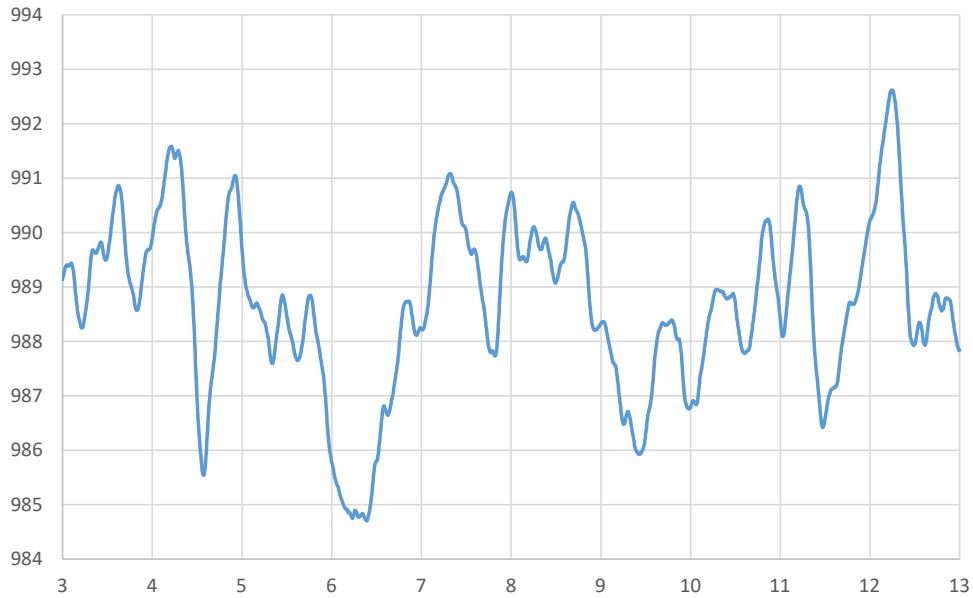
**Fig. 2** Normalised force and displacement values in time for model tuned to the data: Hamilton et al



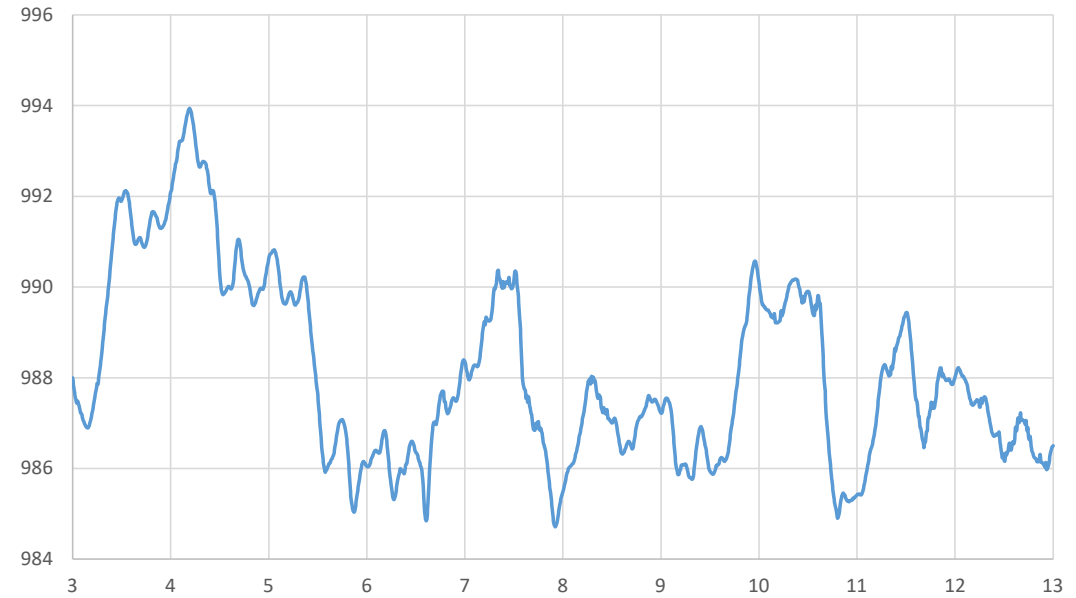
**Fig. 6** Normalised values of force and displacement in time for model tuned to the data: Sliffkin et al.

# Weryfikacja eksperymentalna

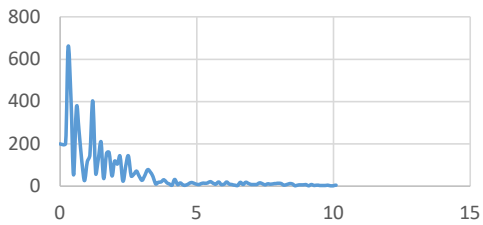
Bez zmęczenia



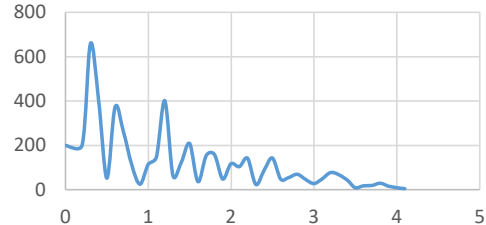
Ze zmęczeniem



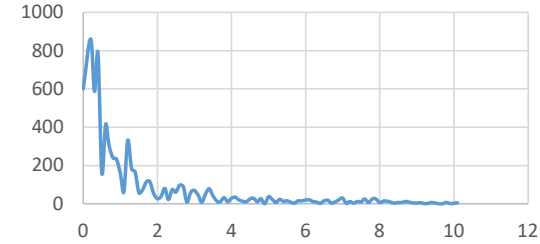
G(t)



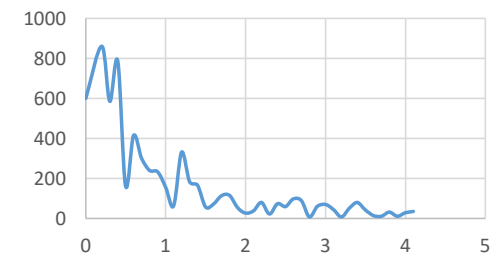
G(t)



G(t)

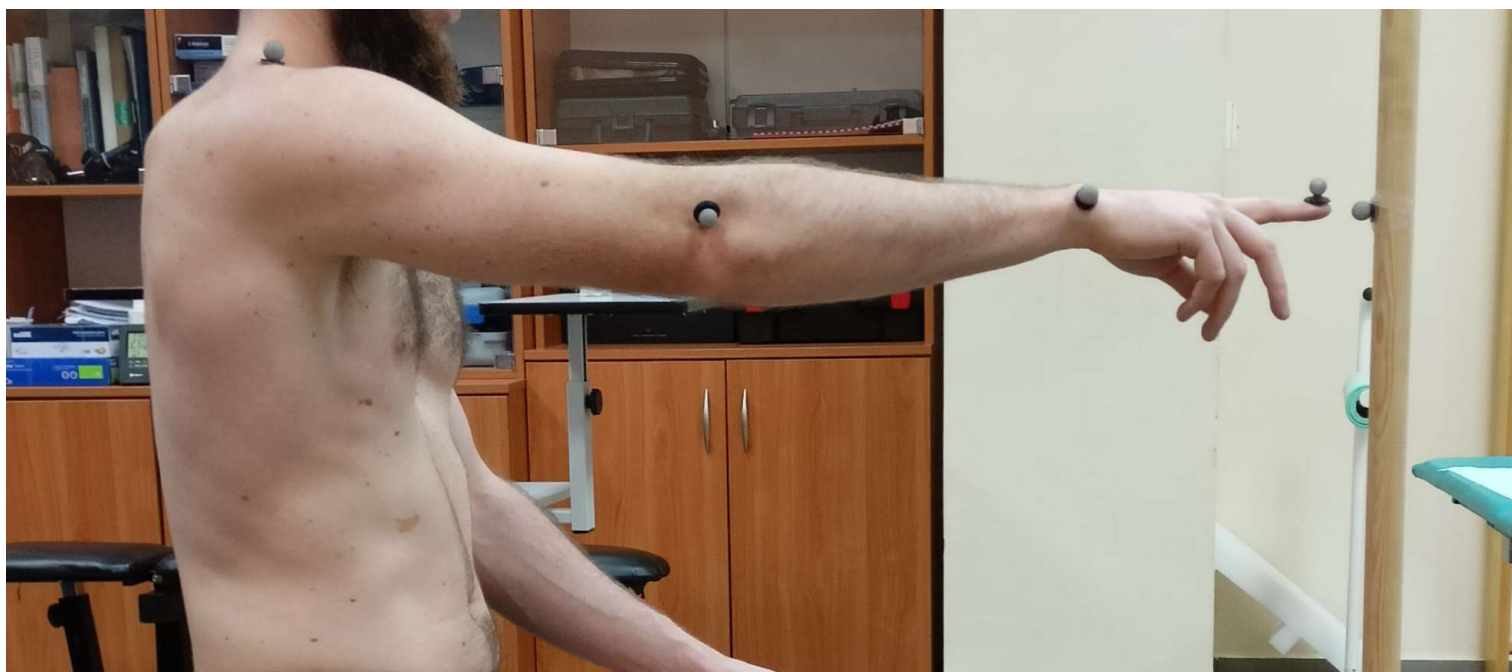


G(t)



# Weryfikacja eksperymentalna

Nagranie Optitrack przed i po zmęczeniu mięśni cyklem ćwiczeń z obciążeniem submaksymalnym,  
Zadanie: wskazywanie punktu przez 30 s



# Podsumowanie

- Aby modele matematyczne dawały wyniki zbliżone do układów rzeczywistych należy uwzględnić zmienne warunki pracy/działania tych drugich
- Im więcej zmiennych parametrów pracy tym większa potrzeba uwzględnienia zjawisk stochastycznych w modelowaniu
- Dla symulacji w krótkim czasie -> procesy stacjonarne
- Dla symulacji w długim czasie -> procesy niestacjonarne

DZIĘKI ZA UWAGĘ



DZIĘKUJĘ ZA  
UWAGĘ

|

PROSZĘ NIE ZADAWAĆ  
ZBYT TRUDNYCH PYTAŃ